Brought to you by:

ASTRA

MATEMATICA FINANZIARIA

programma per studenti in debito

Written by
Matteo Cordaro
Curated by
Chiara Granafei

2022-2023 Edition

<table>
<tr><th colspan="3">INTEGRALI</th></tr>
<tr><td rowspan="7">Integrali indefiniti</td><td>Primitiva di una funzione</td><td>Data una funzione f, si dice che la funzione G è una primitiva di f se:
$$G'(X) = f(X)$$
Come conseguenza del II corollario del teorema di Lagrange, esistono infinite primitive della funzione f della forma:
$$H(x) = G(x) + c$$
Si chiama integrale indefinito, l'insieme di tutte e sole le primitive di f:
$$\int f(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>Condizioni di esistenza della primitiva</td><td>1. f continua su (a,b) $\Rightarrow$ f ammette una primitiva
2. f non ha la proprietà dei valori intermedi $\Rightarrow$ f non ammette una primitiva
Ovvero: se f presenta un punto di salto allora f non ammette una primitiva</td></tr>
<tr><td>Integrali immediati</td><td>Regole immediate [...]</td></tr>
<tr><td>Linearità dell'integrale indefinito</td><td>$$\int [af(x) + bg(x)]dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>1° metodo di integrazione: integrazione per decomposizione in somma</td><td>Integrazione mediante la proprietà di linearità dell'integrale e le proprietà delle frazioni</td></tr>
<tr><td>Prima formula di integrazione per sostituzione</td><td>$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \left[\int f(y)dy\right]_{y=g(x)}$$</td></tr>
<tr><td>2° metodo di integrazione: integrali quasi immediati</td><td>Dalla formula precedente, posso integrare una funzione composta moltiplicata per la derivata dell'interna, seguendo le regole di integrazione immediata.

<u>Tipologie</u>:

a) $\int e^{f(x)}f'(x)dx$
b) $\int f(x)^a f'(x)dx$
c) $\int \frac{k}{(ax+b)^2}dx$
d) $\int \sqrt[n]{f(x)}f'(x)dx = \int f(x)^{\frac{1}{a}}f'(x)dx$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>Formula di integrazione per parti</td><td>$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$</td></tr>
<tr><td></td><td>3° metodo di integrazione: integrazione per parti</td><td>a) $\int x^n e^x dx$, $\int x^n sen(x)dx$, $\int x^n \cos(x)\, xdx$ $\Rightarrow$ $f(x) = x^n$
$g'(x) = e^x, sen(x), \cos(x)$
b) $\int x^n \ln(x)\, dx$ $\Rightarrow$ $f(x) = \ln(x)$
$g'(x) = x^n$
c) $\int \ln(x)\, dx$ $\Rightarrow$ $f(x) = \ln(x)$
$g'(x) = 1$</td></tr>
<tr><td></td><td>Seconda formula di integrazione per sostituzione</td><td>$$\int g(x)dx = \left[\int g\big(f(t)\big)f'(t)dt\right]_{t=f^{-1}(x)}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>4° metodo di integrazione: integrazione per sostituzione</td><td>1. Scegli la sostituzione e indicala con la lettera t
2. Isola la x
3. Deriva ambo i membri dell’uguaglianza includendo dx e dt
4. Esegui la sostituzione nell’integrale e calcolalo normalmente
5. Trovata la primitiva, ritorna alla variabile x

Puoi utilizzarlo anche (ma non solo…) per calcolare gli integrali di funzioni razionali fratte con denominatore di secondo grado con Δ=0

N.B.: alle volte può non essere conveniente isolare la x (punto 2); potrebbe essere conveniente derivare subito entrambi i membri (passare subito al punto 3) ed eseguire la sostituzione</td></tr>
<tr><td></td><td>Integrazione di funzioni razionali fratte</td><td>Consideriamo una funzione razionale fratta con il numeratore di grado n e il denominatore di grado m
a) n ≥ m
Devo procedere con la divisione tra polinomi con l’apposita regola

b) n ≤ m → n=1 e m=2
▪ $\Delta > 0$ → metodo degli A e B
▪ $\Delta = 0$ → o metodo degli A e B (ricordando che il denominatore di B deve essere posto al quadrato) o metodo di sostituzione $(x - a) = t$</td></tr>
</table>

Integrali definiti	Somma di Riemann e Riemann integrabilità	Sia dato un intervallo [a,b]. Si considerino n sottointervalli di [a,b]. Si scelgano, inoltre, i punti $c_k, k = 1,2,\dots,n$ alternativamente il punto medio, l'estremo destro o l'estremo sinistro degli n sottointervalli. Chiamiamo somma di Riemann: $$\sigma_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$ Per $n \to +\infty$ otteniamo: $$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)$$ E se: 1. Esiste finito 2. Non dipende dalla scelta di c_k Allora f si dice R-int e tale limite può essere scritto come l'integrale definito tra a e b: $$\int_a^b f(x)dx$$
	Condizioni di R-integrabilità	1. f è R-int su [a,b] $\Rightarrow f$ è limitata 2. f continua su [a,b] $\Rightarrow f$ è R-int 3. f è limitata e ha un numero finito di punti di discontinuità su [a,b] $\Rightarrow f$ è R-int 4. f è monotona su [a,b] $\Rightarrow f$ è R-int
	Proprietà delle funzioni R-int	Se f e g sono R-int su [a,b] allora: 1. Linearità: af + bg è ancora R-int 2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ 3. $\int_a^a f(x) = 0$ 4. $\int_a^b f(x)d(x) = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 5. Positività: $f(x) \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx \geq 0$ 6. Monotonia: $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx)$ 7. f R-int $\Rightarrow \lvert f \rvert$ R-int 8. $\lvert \int_a^b f(x)dx \rvert \leq \int_a^b \lvert f(x) \rvert dx$
	Valor Medio (o Media integrale)	Dato un intervallo [a,b], il valor medio della funzione ƒ sull'intervallo [a,b] è $$M_f = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$
	Teorema del Valor Medio	Se una funzione ƒ è <u>continua</u> sull'intervallo [a,b] ⇒ allora ∃ un punto $c \in [a,b]$ t.c.: $$f(c) = M_f = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

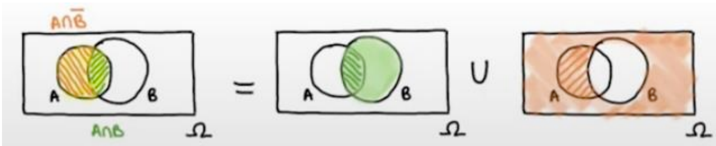
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>I teorema fondamentale del calcolo integrale</td><td>Data una funzione ƒ R-int su [a,b] e una sua primitiva G $$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$</td></tr>
<tr><td>Integrale definito con il metodo di sostituzione</td><td>Ricorda di cambiare gli estremi di integrazione dopo aver eseguito la sostituzione, aggiornandoli rispetto alla sostituzione fatta</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Funzione integrale</td><td>Funzione integrale di centro il punto a</td><td>$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$</td></tr>
<tr><td>Proprietà delle funzioni integrali</td><td>1. Additività sull’intervallo
2. Monotonia: $f(t) \geq 0 \Rightarrow F(x)$ crescente
3. $F(a) = \int_a^a f(x)dx = 0$</td></tr>
<tr><td>Calcolo delle funzioni integrali</td><td>Calcola normalmente l’integrale mantenendo alla fine la variabile x
N.B.: per funzioni integrande definite a tratti, ricordati di <u>partire sempre dal centro fissato</u> della funzione integrale: errore comune e cambiarlo quando la funzione integranda cambia di definizione in un punto diverso rispetto al centro della funzione integrale</td></tr>
<tr><td>II teorema fondamentale del calcolo integrale</td><td>Sia ƒ una funzione R-int su un intervallo I e sia F(x) la sua funzione integrale. Allora:
1. F è continua
2. Se ƒ è <u>anche</u> continua in I ⇒ F è derivabile su I e, in particolare, $F'(x) = f(x)$</td></tr>
<tr><td>Utili impieghi della funzione integrale e del IITFC</td><td>1. Ricerca della primitiva H(x) di ƒ(x) passante per il punto (a,b): $$H(x) = \int_a^x f(t)dt + b$$
2. Derivata della funzione integrale
Diretta applicazione del IITFC nel caso di ƒ continua
3. Equazione della retta tangente ad una F(x) in $[(x_0, G(x_0)] \rightarrow y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$
4. Generica primitiva di una funzione definita a tratti
Semplifica i calcoli e poni il centro della funzione integrale nel punto di cambio di determinazione
5. Confronto tra la ƒ(x) e la F(x)
<table>
<tr><td>ƒ(x_0)=0</td><td>F(x_0) punto di estremo</td></tr>
<tr><td>ƒ(x)>0</td><td>F(x) crescente</td></tr>
<tr><td>ƒ(x)<0</td><td>F(x) decrescente</td></tr>
<tr><td>ƒ(x) crescente</td><td>F(x) concava</td></tr>
<tr><td>ƒ(x) decrescente</td><td>F(x) convessa</td></tr>
<tr><td>ƒ ’(x_0)=0</td><td>F(x_0) punto di flesso</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Integrali generalizzati	Integrabilità in senso generalizzato	Consideriamo una funzione ƒ R-int su [a,x]; Il seguente integrale: $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$ è l'integrale generalizzato di ƒ. In particolare, il limite può ▪ **Convergere ad L** ▪ Divergere a $\pm\infty$ ▪ Non esistere Solo nel primo caso ƒ si dice **integrabile in senso generalizzato**
	Estremi generalizzati di integrazione	1. $[a,+\infty]$ 2. $[-\infty,b]$ 3. $[-\infty,+\infty]$ In questo caso sarà necessario utilizzare la proprietà additiva dell'integrale e dividerlo in due integrali di centro k (scegli k in modo *intelligente*). In particolare, ▪ Se entrambi divergono/non esistono ▪ Se uno solo diverge/non esiste l'integrale generalizzato diverge/non esiste
	Carattere dell'integrale generalizzato	Se ƒ(x)≥0 su [a,+∞] allora, data la sua funzione integrale F(x): $$\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$$ O esiste finito o esiste infinito, *tertium non datur*.
	Integrale notevole	$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a} \to \begin{cases} \text{converge se a} > 1. \\ \text{diverge se } 0 < a \leq 1 \end{cases}$$
	Legame tra integrali e serie	Sia ƒ una funzione positiva, decrescente e integrabile su [a,b]. Sotto queste ipotesi, se ƒ(x)=ƒ(n) allora: $$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ e } \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$ Hanno lo stesso carattere Perciò se viene chiesto di studiare la convergenza, divergenza o non esistenza di una serie, una volta essersi accertati che ƒ(n) sia positiva, decrescente e continua sull'intervallo considerato, possiamo direttamente studiare l'integrale generalizzato
	Corollari	1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ esiste il limite di F(x) ma non è possibile sapere se sia finito o infinito, ovvero non è possibile sapere di F(x) sia integrabile in senso generalizzato o meno

		2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0 \Rightarrow$ esiste il limite di F(x) ed è certamente infinito ($\pm\infty$), ovvero F(x) non è integrabile in senso generalizzato
	Criterio di convergenza del confronto	Siano due funzioni f e g R-int su [a,+∞]. Se **0<f(x)≤*g*(x)** allora: ▪ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge ⇒ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge ▪ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge ⇒ $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge
	Criterio di convergenza del confronto asintotico	Siano due funzioni f e g R-int su [a,+∞]. Se per $x \to +\infty$ f è asintotica a g, allora $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hanno lo stesso carattere Quindi puoi sfoltire f e trasformarla in una g ad essa asintotica per poi studiare quest'ultima, più semplice di quella iniziale
	Criterio di convergenza assoluta	Sia f una funzione R-int su [a,+∞]. Se |f(x)| è integrabile in senso generalizzato allora anche f(x) è integrabile in senso generalizzato e risulta: $$\left\lvert\int_a^{+\infty} f(x)dx\right\rvert \leq \int_a^{+\infty} \lvert f(x)\rvert dx$$ Da cui: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge assolutamente ⇒ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge anche semplicemente
Funzioni integrali di centro $-\infty$	Definizione	Sia f una funzione R-int su [$-\infty$,a]. Definiamo funzione integrale di centro $-\infty$: $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$ N.B. essa presenta un asintoto orizzontale y=0 così che: $$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

PROBABILITÀ E NUMERI ALEATORI	
Proprietà delle operazioni tra eventi A e B	1. $(A^C)^C = A$ 2. $A \cup (A \cap B) = A$ 3. $A \cap (B \cup A)$ 4. $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ 5. $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
Tipologie di evento	1. **Evento certo**: l'evento si verifica sicuramente 2. **Evento impossibile**: l'evento non può verificarsi 3. **Evento aleatorio**: l'evento ha una probabilità di verificarsi o meno 4. **Eventi incompatibili**: gli eventi si escludono a vicenda $\rightarrow A \cap B = \emptyset$
Proprietà di un'algebra	**Proprietà definitorie** 1. $\emptyset \in \mathrm{A}$ 2. $E_1 \in \mathrm{A} \rightarrow \overline{\mathrm{E}}_1 \in \mathrm{A}$ (chiusura rispetto alla negazione) 3. $E_1, E_2 \in \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{E}_1 \cup E_2 \in \mathrm{A}$ (chiusura rispetto all'unione) <u>Ulteriori proprietà</u> 4. $\Omega \in \mathrm{A}$ 5. $E_1, E_2 \in \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{E}_1 \cap E_2 \in \mathrm{A}$ 6. $E_1, E_2 \in \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{E}_1 \setminus E_2 \in \mathrm{A}$ 7. Un'algebra ha elementi di ordine 2^k 8. Un'algebra costituita da infiniti elementi è detta $\sigma - algebra$
Tipologie di algebra fondamentali	1. <u>Algebra banale</u> $\rightarrow \{\emptyset, \Omega\}$ 2. <u>Insieme delle parti</u> $\rightarrow P(\Omega)$ insieme formato da tutti i possibili sottoinsiemi di Ω. Se Ω ha n elementi, $P(\Omega)$ ha $\mathbf{2^n}$ elementi
Probabilità assiomatica: 4 assiomi fondamentali	Siano $E_1, E_2 \in \mathrm{A}$ due eventi: 1. $p(E) \geq 0$ (**non negatività**) 2. $p(\Omega) = 1$ (**normalizzazione**) 3. $E_1, E_2 \in \mathrm{A}$ eventi <u>incompatibili</u> $\rightarrow$ $p(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + p(E_2)$ (**additività finita di eventi incompatibili**) 4. $p(E_1 \| E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$ (**probabilità condizionata**: probabilità che si verifichi E_1 sapendo che si è già verificato E_2)
Conseguenza dei primi tre assiomi	1. $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$ 2. $p(\emptyset) = 0$ 3. **Probabilità dell'unione di eventi compatibili** $\rightarrow p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$ 4. $E_1 \subseteq E_2 \rightarrow p(E_1) \leq p(E_2)$ (**monotonia**)

Teorema della probabilità totale (probabilità dell'**unione tra eventi**)	1. Eventi incompatibili $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$ 2. Eventi compatibili $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_1 \cap E_2)$
Probabilità dell'evento condizionato (IV assioma)	$p(E_1 \| E_2) = \dfrac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)}$ Per eventi incompatibili dal momento che $p(E_1 \cap E_2) = 0$, allora $p(E_1 \| E_2) = 0$
Eventi stocasticamente indipendenti	Due eventi si dicono stocasticamente indipendenti se $p(E_1 \| E_2) = p(E_1)$
Eventi stocasticamente dipendenti	Due eventi si dicono stocasticamente dipendenti se: 1. $p(E_1 \| E_2) > p(E_1)$ $p(E_2 \| E_1) > p(E_2)$ <u>Positivamente correlati</u> 2. $p(E_1 \| E_2) < p(E_1)$ $p(E_2 \| E_1) < p(E_2)$ <u>Negativamente correlati</u>
Teorema della probabilità composta: probabilità dell'intersezione di due eventi	1. Eventi stocasticamente indipendenti $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2)$ 2. Eventi stocasticamente dipendenti $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)p(E_2 \| E_1)$
Limiti dell'unione e dell'intersezione di eventi	**1.** $\boldsymbol{max\,[0, p(A) + p(B) - 1] \leq p(A \cap B) \leq min\,[p(A), p(B)]}$ N.B.: dividendo tutto per $p(A)$ o $p(B)$ si può calcolare i limiti di $p(B \| A)$ e $p(A \| B)$ **2.** $\boldsymbol{max[p(A), p(B)] \leq p(A \cup B) \leq min\big[1, \big(p(A) + p(B)\big)\big]}$
Simmetria dell'indipendenza stocastica	$p(A \| B) = P(A) \Rightarrow P(B \| A) = p(B)$
Eventi compatibili $(\boldsymbol{A \cap B}) \neq \emptyset$	1. Stocasticamente dipendenti $p(A \cap B) = P(A \| B)p(B) = P(B \| A)p(A)$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ 2. Stocasticamente indipendenti $p(A \cap B) = p(A)p(B)$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A)p(B)$
Eventi incompatibili $(\boldsymbol{A \cap B}) = \emptyset$	$p(A \cap B) = 0$ $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ N.B: gli eventi incompatibili sono sempre <u>dipendenti</u> (il verificarsi dell'uno implica che l'altro non possa verificarsi) e, in particolare, sono <u>negativamente correlati</u>: $p(A \cap B) = 0 \rightarrow\ p(A \| B) = 0 \rightarrow$ $p(A \| B) < p(A)$ o $p(B \| A) < p(B)$

Studio della **probabilità totale** (da impiegare nel teorema di Bayes)	$p(A) = p(A\|B)p(B) + p(A\|\bar{B})p(\bar{B})$ $= p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B})$ $p(B) = p(B\|A)p(A) + p(B\|\bar{A})p(\bar{A})$ $= p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$ 
Ulteriori osservazioni	1. $B \subseteq A \rightarrow A \cap B = B \rightarrow$ $p(A\|B) = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$ $p(B\|A) = \frac{p(B)}{p(A)}$ 2. $p(\bar{A}\|B) = 1 - p(A\|B)$ 3. $p(A \backslash B) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) + p(A)p(B\|A)$ 4. Per De Morgan $p(\bar{A} \cup \bar{B}) = p(\overline{A \cap B})$ $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B})$ 5. $p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B)$ $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$
Teorema di Bayes	$\boldsymbol{p(E_1\|E_2) = \frac{p(E_1)p(E_2\|E_1)}{p(E_2)}}$ Dove $p(E_2)$ al denominatore si calcola mediante lo studio della probabilità totale: $p(E_2) = p(E_2\|E_1)p(E_1) + p(E_2\|\overline{E_1})p(\overline{E_1})$ $\frac{p(E_2\|E_1)}{p(E_2)} = k$ è detto *fattore di aggiornamento*. In particolare: $\Rightarrow \begin{cases} se \quad k > 1 \Rightarrow E_1, E_2 \text{ positivamente correlati} \\ se \quad k = 1 \Rightarrow E_1, E_2 \text{ indipendenti} \\ se \quad 0 < k < 1 \Rightarrow E_1, E_2 \text{negativamente correlati} \end{cases}$
Borel misurabilità e **Numeri Aleatori**	$X(\omega): \Omega \rightarrow R$ si dice B-misurabile rispetto all'algebra A se $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in A$. Se $X(\omega): \Omega \rightarrow R$ è B-misurabile allora è un numero aleatorio (NA) Per capire se una funzione è un numero aleatorio, devo verificare la sua B-misurabilità; per farlo controllo se i sottoinsiemi A_x, costituiti dalle immagini di X ≤ x prescelto, appartengono ad A; usa la linea dei numeri per aiutarti. In altre parole, *una funzione B-misurabile non deve dividere ciò che è unito nell'algebra*

Funzione di ripartizione di un numero aleatorio		$F(x) = p(A_x) = P[X(\omega) \leq x]$ <u>Proprietà della F(x)</u> ▪ $F(x)$ è monotona non decrescente → $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$ ▪ $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ ▪ F(x) è continua da destra
NA discreti	Finiti	Un NA è discreto finito se può assumere un numero finito (al più, un'infinità numerabile) di valori. Indicando con $p_s = p[X(\omega) = x_s], s = 1,2, \dots, n$ si ha: $$X(\omega) \sim \begin{cases} x_1\, x_2 \cdots x_n \\ p_1\, p_2 \cdots p_n \end{cases}$$ Ad ogni numero aleatorio discreto si associa una **funzione di probabilità** che ad ogni valore assunto dal NA associa la sua probabilità $$f(x_s) = P(X = x_s)\ s = 1,2, \dots$$ E in particolare: $$f(x_s) = \begin{cases} 0\ x \neq x_s \\ p_s\ x = x_s \end{cases}$$ <u>Proprietà della *f(x)*</u> ▪ $0 \leq p(x_s) \leq 1$ (non negatività) ▪ $\sum_{s=1}^{n} p(x_s) = p_s = 1$ **Funzione di ripartizione di un NA discreto** $$F(X) = P(X(\omega) \leq x)\ \ \forall x \in R$$ **Regole di calcolo delle probabilità** ▪ $p(X \leq a) = F(a)$ ▪ $p(X > a) = 1 - p(X \leq a) = 1 - F(a)$ ▪ $p(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ ▪ $p(X > a \mid X \leq b) = \frac{p(a<X\leq b)}{p(X\leq b)} = \frac{F(b)-F(a)}{F(b)}$ ▪ N.B.: $p(x < a) \neq F(a)$ ▪ $p(x < a)$ → non c'è l'uguale: non posso usare la funzione di ripartizione! Devo, quindi, utilizzare la distribuzione di probabilità ▪ Se un numero k non è incluso nelle determinazioni del NA → $p(X = k) = 0$ ▪ Se due numeri *m* e *n* non risultano tra le determinazioni del NA → $p(m < X \leq n)$ occorre osservare le determinazioni all'interno delle quali sono inclusi *m* ed *n*

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td>
<td></td>
<td>N.B.: quando viene fornita la funzione di ripartizione (ricorda: è una funzione che <u>somma</u> le probabilità!) ragiona sul grafico della F(X) e, per calcolare la probabilità, “sottrai” le aree sottese dal grafico.

Trasformazioni lineari
Dato un numero aleatorio X è possibile che venga richiesto di valutare Y=aX+b; per farlo cambiamo le determinazioni di X per capire come si distribuisce Y; ma attenzione: se una determinazione sarà comune dopo la trasformazione, occorrerà sommare le due probabilità corrispondenti.</td>
</tr>
<tr>
<td>Infiniti</td>
<td>Un NA è discreto infinito se può assumere un numero infinito di valori.
Indicando con $p_s = p[X(\omega) = x_s), s = 1,2, \dots, n \dots$ si ha:
$$X(\omega) \sim \begin{cases} x_1\, x_2 \cdots x_n \cdots \\ p_1\, p_2 \cdots p_n \cdots \end{cases}$$
Normalmente questo tipo di distribuzioni vengono con una distribuzione di probabilità del tipo:
$$P(X = n) = (q)^n \; con \; 0 < q < 1$$
Per queste il criterio di normalizzazione diventa:
$$\sum_{n=k}^{+\infty} (q)^n = \frac{q^k}{1-q} = 1$$
Valgono le normali regole di probabilità viste prima.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">NA continui</td>
<td>**Funzione di ripartizione e funzione di densità di probabilità**
Se esiste, la **funzione di ripartizione** di un NA continuo è:
$$F(X) = P(X(\omega) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f(t)dt}$$
N.B.: la f(t) deve essere sicuramente integrabile, ma non necessariamente continua.

<u>Proprietà della $F(X)$</u>
▪ In ogni punto in cui la f(x) è continua, la F(x) è integrabile e $F'(x) = f(x)$
▪ $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
▪ $\mathrm{x}_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$

La f(x) si chiama funzione di ***densità di probabilità***.
<u>Proprietà della f(x)</u>
▪ $\mathrm{f(x)} \geq 0$ (non negatività)
▪ $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(x)dx} = 1$ (normalizzazione)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td><u>Calcolo della probabilità</u>
N.B.: nei NA continui non vi è distinzione tra < e ≤
▪ $p(X </\leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = F(a)$
▪ $p(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$
▪ $p(X >/\geq a) = 1 - p(X \leq/< a)$
▪ $\boldsymbol{p(X = a) = 0}$: la probabilità calcolata in un determinato punto a è sempre nulla, per ogni a.
▪ Probabilità condizionata: si procede seguendo la formula generale. Ecco un caso
$p(x \leq a \mid x \leq b) = \frac{x \leq a \cap x \leq b}{x \leq b}$
Per gli altri casi l'impostazione è la medesima; attento a eseguire in modo corretto l'intersezione al numeratore!

<u>Ricerca della f(x) data la F(x)</u>
Sia F continua, crescente e t.c.
$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$; Allora:
a) Se F è anche derivabile in R → F'(x)=f(x)
b) Se F non è derivabile in x_0 →
$$\text{f(x)} = \begin{cases} F'(x) & x \neq x_0 \\ k \geq 0 & x = x_0 \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td>Valori di sintesi</td><td>Valore atteso
$E(X)$</td><td>$$E[X(\omega)] = \begin{cases} \sum_{i=l}^{n} x_i p_i & \text{NA discreto finito} \\ \sum_{i=l}^{+\infty} x_i p_i & \text{NA discreto infinito} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx & \text{NA continuo} \end{cases}$$
N.B. se l'integrale o la serie diverge, il valore atteso NON esiste!

<u>Proprietà</u>
▪ $E(aX + b) = aE(x) + b$
▪ Il E(X) di NA costante è la costante stessa

<u>E(X) di una funzione di un NA</u>
È possibile incontrare NA che siano delle funzioni:
$$Y = \rho(x)$$</td></tr>
</table>

		Nel calcolo del E[$\rho(x)$] al posto della x inserisco $\rho(x)$ e procedo normalmente <u>Momento di ordine 2</u> Si chiama **momento di ordine 2** il valore atteso: $$E(X^2) = \begin{cases} \sum_{i=l}^{n} x_i^2 p_i \\ \sum_{i=l}^{+\infty} x_i^2 p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \end{cases}$$ <u>Formula notevole</u> $E[aX^2 + bX + c] = aE(x^2) + bE(x) + c$
	Varianza $Var(X)$	<u>Definizione</u> $Sia\ E(X) = \mu \rightarrow$ $$Var(X) = \begin{cases} \sum_{i=l}^{n} (x-\mu)^2 p_i \\ \sum_{i=l}^{+\infty} (x-\mu)^2 p_i \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx \end{cases}$$ <u>Formula di calcolo</u> $$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$ <u>Proprietà</u> ▪ $Var(x) \geq 0$ ▪ $Var(x) = 0 \iff p(X = c) = 1$ ▪ $Var(aX + b) = a^2 Var(x)$ “b sparisce” N.B.: $E(X) = a; E(X^2) = b$; poiché $Var(X) \geq 0 \rightarrow b \geq a^2$ <u>Trasformazioni lineari affini</u> $Var(aX + bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$ $Var(aX - bY) = a^2 Var(X) + (-b)^2 Var(Y) \rightarrow$ quindi rimane una somma!

	Scarto quadratico medio o deviazione standard $\sigma(X)$	$$\sigma(X) = \sqrt{Var(x)}$$ <u>Proprietà</u> ▪ $\sigma(aX) = \|a\|\sqrt{Var(x)}$
Distribuzioni notevoli di NA continui	Distribuzione esponenziale di parametro $\alpha > 0$	$$X \sim \exp(\alpha) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$ a) <u>Funzione di ripartizione</u> $$F(X) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$ b) <u>Probabilità</u> $$p(a \leq X \leq b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$$ c) <u>Valori di sintesi</u> ▪ $E(x) = \frac{1}{\alpha}$ ▪ $Var(x) = \frac{1}{\alpha^2}$ ▪ $\sigma(X) = \frac{1}{\alpha}$ (poiché $\alpha > 0$) Uso: descrivere i tempi di attesa durante i processi produttivi ecc…
	Distribuzione uniforme continua	$$X \sim U(a,b) = \begin{cases} 0 & x \notin [a,b] \\ \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \end{cases}$$ a) <u>Funzione di ripartizione</u> $$F(X) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$ b) <u>Probabilità</u> Classica applicazione delle regole c) <u>Valori di sintesi</u> ▪ $E(x) = \frac{a+b}{2}$ ▪ $Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$ ▪ $\sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
	Distribuzione normale gaussiana standardizzata	$$X \sim N(0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$ a) <u>Funzione di ripartizione</u> $$F(X) = \phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt$$ b) <u>Probabilità</u> Valori tabulati

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
c) <u>Valori di sintesi</u>

$E(x) = 0$
$Var(x) = 1$
$\sigma(X) = 1$

d) Valori notevoli
$\phi(1) = 0{,}84134$
$\phi(0) = 0{,}5$
$\phi(-1) = 0{,}15866$
Uso: descrive le distribuzioni di errori di misura, di rilevamento su un campione (il voto di un esame…)
</td></tr>
<tr><td></td><td>Distribuzione normale gaussiana generalizzata</td><td>

$$X \sim N(m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

a) <u>Funzione di ripartizione</u>

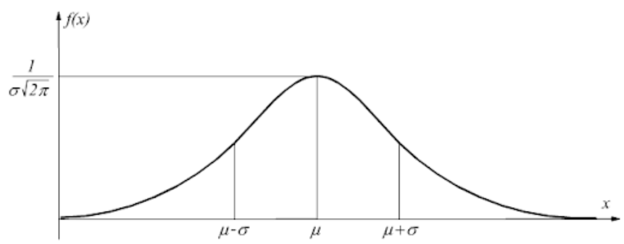
$$F(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t-m}{\sigma}\right]^2} dt$$

N.B.: $\boldsymbol{F(X) = \phi\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)}$
b) <u>Probabilità</u>
Valori tabulati
N.B.: $p(m-\sigma < x < m+\sigma) = \phi(1) - \phi(-1)$
c) <u>Valori di sintesi</u>

$E(x) = m$
$Var(x) = \sigma^2$
$\sigma(X) = \sigma$

d) <u>Grafico notevole</u>

Due punti di flesso: $x = m + \sigma$ e $x = m - \sigma$
Punto di massimo: $x = m$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \rightarrow F(m) = 0{,}5$



</td></tr>
<tr><td>Distribuzioni notevoli di NA discreti</td><td>Distribuzione di Poisson</td><td>

$$X \sim Po(\lambda > 0) \rightarrow P(X = k) = \frac{\lambda}{k!} e^{-\lambda}$$

a) <u>Probabilità</u>

$p(x < a)$ = somma delle probabilità delle determinazioni fino a quella precedente a
$p(x \leq a)$ = somma delle probabilità delle determinazioni fino ad a inclusa
N.B.: $\leq \neq <$

</td></tr>
</table>

		▪ $p(x \geq a) = 1 - p(x < a) = 1 - p(x = k) - p(x = t) - \cdots$ fino alla determinazione precedente a b) <u>Valori di sintesi</u> ▪ $E(x) = \lambda$ ▪ $Var(x) = \lambda$ ▪ $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$ Uso: conta il numero di eventi rari in un certo intervallo di tempo (malfunzionamenti, incidenti…)
	Distribuzione binomiale	$X \sim Bin(n,p) \rightarrow P(X = k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$ a) <u>Proprietà del coefficiente binomiale</u> $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ ▪ $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ ▪ $\binom{n}{1} = n$ ▪ $0! = 1$ ▪ 1!=1 b) <u>Probabilità</u> Come per la precedente c) <u>Valori di sintesi</u> ▪ $E(x) = np$ ▪ $Var(x) = np(1-p)$ ▪ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$ Uso: descrive il numero di successi di n prove indipendenti di un esperimento, detto bernoulliano, avente come risultato solamente successo o fallimento
	Distribuzione uniforme discreta	$X \sim UD \rightarrow P(X = x_s) = \frac{1}{n} \quad s = 1,2,\dots,n$ a) <u>Valori di sintesi</u> ▪ $E(x) = \frac{n+1}{2}$ ▪ $Var(x) = \frac{n^2-1}{12}$ ▪ $\sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
Vettori aleatori	Vettore aleatorio bidimensionale	$X(\omega): \Omega \rightarrow R$ è un VAB se è B-misurabile sull'algebra A, ovvero se $A_{xy} = \{\omega \in R : [X(\omega) \leq x] \cap [Y(\omega) \leq y]\} \in A$, $\forall x, y \in R$
	Funzione di ripartizione congiunta	$F(X,Y) = p(A_{xy}) = p[X(\omega) \leq x] \cap [Y(\omega) \leq y]$

Funzioni di ripartizione marginali

$$F^{(x)}(X) = p(X(\omega) \leq x)$$
$$F^{(y)}(Y) = p(Y(\omega) \leq y)$$

<u>Procedimento</u>

1) Data la tabella a doppia entrata, calcola le probabilità marginali
2) Costruisci la funzione definita a tratti distinguendo la posizione a seconda delle determinazioni: parti da 0 e procedi sommando la probabilità marginale

Ad esempio, supponendo la presenza di due determinazioni della X:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1^{(x)} & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1^{(x)} + p_2^{(x)} = 1 & x \geq x_2 \end{cases}$$

Funzione di probabilità

$$f(x, y) = p_{ij} = p(X = x_{ij})$$

<u>Proprietà</u>

- $0 \leq f(x, y) \leq 1$
- $\sum_{X \leq x; Y \leq y} p_{xy} = 1$

Tabella a doppia entrata

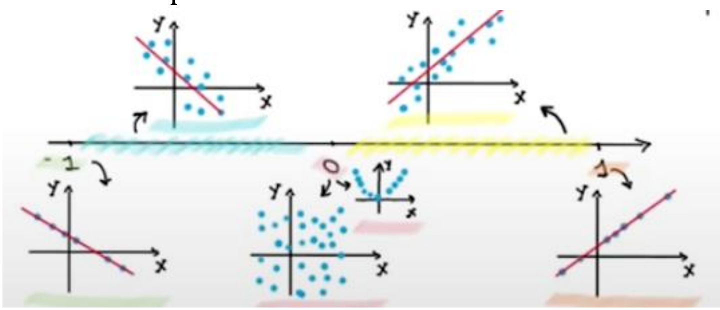
X \ Y	y_1	y_2	$p^{(x)}$
x_1			
x_2			
$p^{(y)}$			**1**

La tabella a doppia entrata prevede:

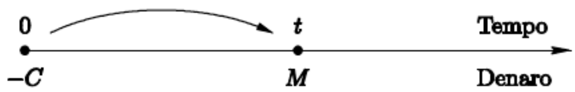
- Le probabilità congiunte nelle caselle verdi $p_{11}, p_{21}, \dots, p_{ij}$
- Le probabilità marginali per ciascuna componente nelle caselle rosse: esse sono la somma della rispettiva riga (per x) e della rispettiva colonna per la y
- La casella di controllo blu: la somma di tutte le probabilità marginali deve dare 1

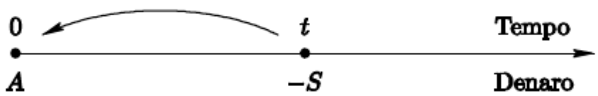
Per calcolare la funzione di ripartizione congiunta basta considerare, dalla quantità richiesta su X e su Y e procedere a ritroso.

		<u>Calcolo delle *p marginali* a partire da *p congiunte*</u> È sempre possibile: basta sommare ordinatamente le rispettive righe o colonne
	Indipendenza stocastica di VA	Un VA è stocasticamente indipendente se e solo se: ▪ La probabilità congiunta è il prodotto delle probabilità marginali rispettive ▪ La funzione di ripartizione congiunta è il prodotto delle funzioni di ripartizione marginali rispettive N.B.: in una tabella a doppia entrata, per capire se sono stocasticamente indipendenti, basta controllare se le congiunte sono effettivamente il prodotto delle marginali <u>Calcolo delle *p congiunte* a partire da *p marginali*</u> È possibile SOLO nel caso di indipendenza stocastica; basta fare il prodotto delle rispettive marginali
	Probabilità condizionata	$$p(Y\|X) = \frac{p_{xy}}{p_j^{(x)}}$$ $$p(X\|Y) = \frac{p_{xy}}{p_i^{(y)}}$$
	E(X)	$$E(X,Y) = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix}$$ N.B.: permette di calcolare il rendimento atteso di un portafoglio costituito da *a* titoli e da *1-a* titoli di altro tipo: $$\mu = aE(X) + (1-a)E(Y)$$
	Teoremi su VA linearmente indipendenti	▪ $E(XY) = E(X)E(Y)$ ▪ $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$ ▪ $Var(\alpha X + \beta Y + \gamma) = \alpha^2 Var(x) + \beta^2 Var(Y)$
	Covarianza di un VA	<u>Definizione</u> $$Cov(x,y) = [X - E(X)][Y - E(Y)]$$ <u>Formula di calcolo</u> $$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$ ▪ $Cov(X,Y) > 0 \rightarrow$ positivamente linearmente correlati ▪ $Cov(X,Y) < 0 \rightarrow$ negativamente linearmente correlati ▪ X,Y stocasticamente indipendenti $\Rightarrow$ $Cov(X,Y) = 0$ Ma <u>NON vale l'inverso $\nLeftarrow$</u> <u>Proprietà</u> ▪ $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$

		▪ $Cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha\beta Cov(X,Y)$ ▪ $Cov(X+\alpha, Y+\beta) = Cov(X,Y)$ ▪ $-\sigma_x\sigma_y \leq Cov(X,Y) \leq +\sigma_x\sigma_y$ <u>Tip</u> Per calcolare la covarianza, occorre calcolare $E(XY)$. Per fare ciò risulta molto comodo, se si ha una tabella a doppia entrata, procedere così: 1) Fare il prodotto ordinato tra: *determinazione X * determinazione Y * probabilità congiunta XY* 2) Fare la somma di tutti i prodotti effettuati
	Coefficiente di correlazione lineare di Bravais	$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$ <u>Proprietà</u> ▪ $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ ○ $\rho(X,Y) = -1 \rightarrow$ perfetta correlazione lineare negativa: le determinazioni del VA si dispongono lungo una retta di coefficiente angolare pari a -1 ○ $\rho(X,Y) = -1 \rightarrow$ perfetta correlazione lineare positiva: le determinazioni del VA si dispongono lungo una retta di coefficiente angolare pari a 1 ○ $\rho(X,Y) = 0 \rightarrow Cov(X,Y) = 0 \rightarrow$ il VA è linearmente indipendente ○ $-1 < \rho(X,Y) = 0 < 1 \rightarrow$ le determinazioni del VA sono dipendenti ma non perfettamente  ▪ $\rho(aX+b, cY+d) = \frac{ac}{\lvert ac \rvert}\rho(X,Y)$ ▪ VA stocasticamente indipendenti $\rightarrow Cov(X,Y) = 0 \rightarrow \rho(X,Y)$
	Teorema della Varianza	$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$
	Trasformazioni lineari affini di un vettore aleatorio	<u>Calcolo della probabilità con la tabella a doppia entrata</u> Per velocizzare i calcoli, al posto di calcolare la distribuzione di probabilità delle determinazioni, puoi procedere impostando una tabella a doppia entrata che presenta:

		▪ Nella descrizione, la trasformazione lineare affine; ▪ Nelle celle, le determinazioni, anche ripetute, generate dalle precedenti trasformazioni mediante la trasformazione effettuata; ▪ Le nuove determinazioni hanno lo stesso posto delle rispettive probabilità (può essere necessario sommarle se ci sono più determinazioni uguali); <u>Indici di sintesi</u> ▪ $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ ▪ $Var(aX + bY + c) = a^2Var(X) + b^2Var(Y) + 2abCov(X,Y)$ ▪ $Var(aX - bY) = a^2Var(X) + (-b)^2Var(Y) + 2a(-b)Cov(X,Y)$ N.B.: se fosse $Var(X - Y)$ e come se Y avesse come coefficiente $-1 \rightarrow$ poiché $(-1)^2 = 1$, rimane positiva la $Var(Y) \rightarrow$ $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$
	Sintesi del vettore aleatorio	a) <u>Vettore dei valori attesi</u> $$\mu = \begin{bmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{bmatrix}$$ b) <u>Matrice varianze covarianze</u> $$V = \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix}$$ Così che: ▪ Dato $Z = aX + bY$ ▪ Detta $\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, la matrice dei coefficienti di X e Y, e la sua trasposta $\hat{a}^t = [a \quad b]$ Risulta: $$Var(Z) = \hat{a}^t \cdot V \cdot \hat{a} = [a \quad b] \begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

<table>
<tr><th colspan="2">MATEMATICA FINANZIARIA – PARTE A</th></tr>
<tr><th colspan="2">1. Leggi finanziarie in una variabile</th></tr>
<tr><td>Operazioni finanziarie</td><td>Un’operazione finanziaria consiste nello scambio di capitali tra due parti in date diverse mediante un contratto.</td></tr>
<tr><td>Capitalizzazione</td><td>La capitalizzazione consiste nell’investire del denaro attualmente disponibile C, detto capitale iniziale, per ottenere la somma di denaro M, detta montante, in un tempo futuro t


Detto C il capitale al tempo t_0 e M il montante al tempo $t_n > t_0$, si ha che:
$$M = C + I$$
Dove I è il tasso d’interesse; il montante di un qualunque capitale impiegato per un tempo t, risulta:
$$M = C * f(t)$$
Dove $f(t)$ è il fattore di montante</td></tr>
<tr><td>Attualizzazione</td><td>L’attualizzazione o sconto consiste nel ricevere ora del denaro A, detto valore attuale o valore scontato, in cambio della restituzione della somma di denaro S, detta valore nominale o valore a scadenza, in un tempo futuro t


Detto S il valore nominale e A il valore attuale, si ha:
$$S = A + D$$
Dove D è lo sconto; il valore attuale A di un valore nominale S ad un tempo t, si ottiene:
$$A = S * \varphi(t)$$
Dove $\varphi(t)$è il fattore di sconto</td></tr>
<tr><td>Fattori finanziari</td><td>I <u>fattori finanziari</u> sono: $\begin{cases} f(t) = \frac{M}{C} & \text{fattore di montante} \\ \varphi(t) = \frac{A}{S} & \text{fattore di sconto} \end{cases}$
I fattori finanziari si dicono coniugati poiché vale:
$$f(t)\varphi(t) = 1$$
quindi, data un’operazione, l’altra è la sua reciproca.</td></tr>
<tr><td>Tassi unitari</td><td>Tasso unitario d’interesse: misura l’interesse prodotto nel primo periodo unitario dal capitale unitario:
$$i = f(1) - 1$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Tasso unitario di sconto: misura l’interesse prodotto nel primo periodo unitario dal capitale unitario

$$d = 1 - \varphi(1) = 1 - \frac{1}{f(1)}$$

Da cui risultano le seguenti relazioni

$$d = \frac{D}{S} = \frac{i}{1+i} \quad i = \frac{I}{C} = \frac{d}{1-d}$$

Validi per tutti i tipi di regimi finanziari coniugati</td></tr>
<tr><td>Proprietà delle leggi finanziarie in una variabile</td><td colspan="2">

$$M(t) = f(t)C, \quad A(t) = \varphi(t)S$$

Rappresentano due leggi finanziarie in una variabile indipendente t, che rappresenta la durata temporale, espressa in anni, dell’operazione.
Esse possiedono quattro livelli di generalità obbligatori:

Livello 1. $f(0) = 1 \rightarrow$ non ci sono costi associati all’impiego
Livello 2. $\text{Ƒ}(0) = 1 \; e \; f(t) \geq 0 \rightarrow$ il montante è sempre positivo
Livello 3. $\text{Ƒ}(0) = 1, f(t) \geq 0$ e $f(t)$ monotona crescente $\rightarrow$ il montante non solo è positivo ma cresce nel tempo
Livello 4. $\text{Ƒ}(0) = 1, f(t)$ monotona crescente e $f(t)$ continua in t e ivi derivabile $\rightarrow$ requisiti di regolarità</td></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Esempio notevole sul quaderno</u></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Regimi di finanziari usuale (soddisfano il 4° livello di generalità)</td><td>Capitalizzazione semplice e sconto razionale</td><td><u>Regime in cui l’interesse è proporzionale al capitale C, al tempo t e al tasso i</u>

$$I = C * i * t$$

- Leggi finanziarie:

$$f(t) = 1 + it \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+it}$$

Da cui:
Capitalizzazione semplice $M(t) = C(1+it)$
Sconto semplice (o razionale) $A(t) = \frac{1}{1+it}S$</td></tr>
<tr><td>Capitalizzazione composta e sconto composto (annuale e istantanea)</td><td>Capitalizzazione composta annua

- Leggi finanziarie:

$$f(t) = (1+i)^t \quad \varphi(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$$

Da cui:
Capitalizzazione composta $M(t) = C(1+i)^t$
Sconto composto $A(t) = \frac{1}{(1+i)^t}S$

Capitalizzazione composta istantanea e intensità istantanea d’interesse
Tale regime è anche noto con il nome di regime esponenziale: infatti, posto:

$$\delta = \ln(1+i) \rightarrow \mathbf{1} + \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\delta}}$$</td></tr>
</table>

		E dunque: $$f(t) = e^{\delta t} \quad \varphi(t) = \frac{1}{e^{\delta t}}$$ forma equivalente alla precedente e molto comoda per la derivazione: Capitalizzazione composta istantanea $\quad M(t) = e^{\delta t} C$ Sconto composto $\quad A(t) = \frac{1}{e^{\delta t}} S$ Pertanto, sussiste un legame tra ***i*** e $\boldsymbol{\delta}$: noto **i** $\quad \delta = \ln(1+i)$ noto $\boldsymbol{\delta}$ $\quad i = e^{\delta} - 1$
	Capitalizzazione a interessi semplici anticipati e sconto commerciale	Si parte dal fattore di attualizzazione. <u>Lo sconto è proporzionale alla durata dell'operazione</u>: $$D = S * d * t$$ ▪ Leggi finanziarie: $$\varphi(t) = 1 - dt \quad f(t) = \frac{1}{1 - dt}$$ Da cui: Sconto commerciale $\quad A(t) = S(1 - dt)$ Capitalizzazione a interesse semplice anticipato $\quad M(t) = \frac{1}{1 - dt} C$
Tassi variabili	1. <u>Capitalizzazione semplice</u> $$f(t) = (1 + i_1 t_1 + \cdots + i_n t_n)$$ $$\varphi(t) = \frac{1}{(1 + i_1 t_1 + \cdots + i_n t_n)}$$ 2. <u>Capitalizzazione composta</u> $$f(t) = (1 + i_1)^{t_1} \ldots (1 + i_n)^{t_n}$$ $$\varphi(t) = \frac{1}{(1 + i_1)^{t_1} \ldots (1 + i_n)^{t_n}}$$ Nel caso in cui lo esprimessimo in *forma esponenziale* si ha $$f(t) = e^{\delta_1 t_1} e^{\delta_2 t_2} \ldots + e^{\delta_n t_n}$$ 3. <u>Capitalizzazione a interesse anticipato</u> $$\varphi(t) = 1 - d_1 t_1 - \cdots - d_n t_n$$ $$f(t) = \frac{1}{1 - d_1 t_1 - \cdots - d_n t_n}$$	

Tabella riassuntiva

Regime \ Incognita	**Montante** $\boldsymbol{M = Cf(t)}$	**Capitale** $\boldsymbol{C = \frac{M}{f(t)}}$	**Tasso** $\boldsymbol{i = \frac{I}{C}}$ $\boldsymbol{d = \frac{D}{S}}$	**Tempo**
Interesse semplice $f(t) = 1 + it$	$M = C(1+it)$	$C = \frac{M}{1+it}$	$i = \frac{M-C}{C*t}$	$t = \frac{M-C}{C*i}$
Interesse composto $f(t) = (1+i)^t$	$M = C(1+i)^t$	$C = \frac{M}{(1+i)^t}$	$i = \left(\frac{M}{C}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$	$t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}$
Interesse semplice anticipato $f(t) = \frac{1}{1-dt}$	$M = \frac{C}{1-dt}$	$C = M(1-dt)$	$d = \frac{M-C}{M*t}$	$t = \frac{M-C}{M*d}$

Regime \ Incognita	**Valore attuale** $\boldsymbol{A = S * \varphi(t)}$	**Valore nominale** $\boldsymbol{S = \frac{A}{\varphi(t)}}$	**Tasso** $\boldsymbol{i = \frac{I}{C}}$ $\boldsymbol{d = \frac{D}{S}}$	**Tempo**
Sconto semplice (razionale) $\varphi(t) = \frac{1}{1+it}$	$A = \frac{S}{1+it}$	$S = A(1+it)$	$i = \frac{S-A}{A*t}$	$t = \frac{S-A}{A*i}$
Sconto composto $\varphi(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$	$A = \frac{S}{(1+i)^t}$	$S = A(1+t)^t$	$i = \left(\frac{S}{A}\right)^{\frac{1}{t}} - 1$	$t = \frac{\ln\left(\frac{S}{A}\right)}{\ln(1+i)}$
Sconto commerciale $\varphi(t) = 1 - dt$	$A = S(1-dt)$	$S = \frac{A}{1-dt}$	$d = \frac{S-A}{S*t}$	$t = \frac{S-A}{S*d}$

Normalizzare il tempo t

Il fattore t è da esprimere in anni: se **n** è il numero degli anni, **m** è il numero dei mesi e **g** è il numero dei giorni:

$$t = n + \frac{m}{12} + \frac{g}{365}$$

Esempi notevoli sul quaderno

Interessi periodali

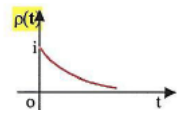
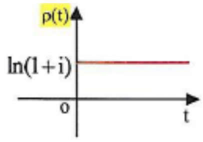
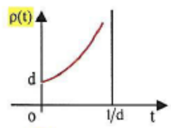
I tassi d'interesse si distinguono in:

- Effettivi:
  - Periodali i_m
  - Annuali i
- Nominali:
  - TAN j_m

a) Tassi periodali: tasso relativo ad un periodo pari ad $1/m$ di anno, riferito al regime di capitalizzazione

b) Tasso nominale annuo (TAN): tasso nominale corrispondente al tasso effettivo composto periodale

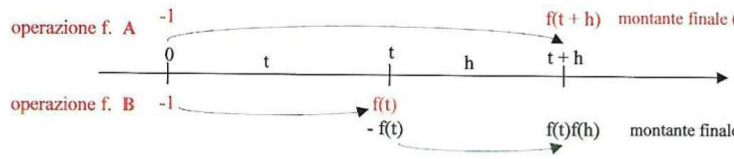
$$j_m = m * i_m$$

	È un tasso annuo e non un tasso periodale e risulta: $$j_m < i$$ Per tale ragione è usato spesso nelle proposte pubblicitarie di finanziamento
Tassi equivalenti	Def.: due tassi, relativi a differenti periodi di capitalizzazione, sono equivalenti quando, a parità di legge finanziaria, applicati allo stesso capitale C e la stessa durata t, producono montanti M uguali 1) Capitalizzazione semplice $$i_m = \frac{i}{m}$$ 2) Capitalizzazione composta $$(1+i_m)^m = 1+i \to$$ $$\begin{cases} i = (1+i_m)^m - 1 \\ i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1 \\ i_m = \sqrt[m]{(1+i_p)^p} - 1 \end{cases}$$ da periodale ad annuale da annuale a periodale da periodale a periodale 3) Capitalizzazione a interessi semplici anticipati $$d_m = \frac{d}{m}$$
Intensità istantanea d'interesse	È una funzione $\rho(t)$ matematicamente definita come dalla derivata logaritmica del fattore di montante $$\rho(t) = D[lnf(t)] \to \rho(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \text{ o } \rho(t) = -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$$ Regime a interessi semplici (decrescente) $$\rho(t) = \frac{i}{1+it}$$  Regime a interessi composti (costante) → $\boldsymbol{\delta}$ detto **tasso istantaneo d'interesse** $$\rho(t) = \ln(1+i) = \delta$$  Regime a interessi semplici anticipati (crescente) $$\rho(t) = \frac{d}{1-dt}$$  N.B.: Ricorda che $\begin{cases} \ln(e^k) = k \\ e^{\ln(k)} = k \end{cases}$
Teorema di Cantelli (1 variabile)	*Una legge in una variabile f(t) differenziabile per ogni t ≥ 0 è **scindibile secondo Cantelli** se e solo se la sua intensità istantanea d'interesse $\rho(t)$ è <u>costante</u>, ovvero <u>non dipende da t</u>* $$f(t) \text{ scindibile } \Leftrightarrow \rho(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \text{ è costante } \forall t \geq 0$$ Quindi per il **regime a interessi composti** in cui l'intensità d'interesse è la costante $\boldsymbol{\delta}$ vale in Teorema di Cantelli e, in particolare, vale la seguente formula inversa che permette di *calcolare il fattore di montante data l'intensità d'interesse associata*. $$f(t) = e^{\int_0^t \rho(s)ds}$$ Per capitalizzazioni composte risulta semplicemente:

<table>
<tr><td></td><td>$f(t) = e^{\delta t}$</td></tr>
<tr><td>Saggio annuo d'interesse</td><td>È il fattore:

$$r = f(1) - f(0)$$</td></tr>
<tr><td>Scindibilità (1 variabile)</td><td>Consideriamo due operazioni finanziarie:

- Operazione A: si impiega un capitale unitario da 0 a (t+h), ottenendo il montante $f(t+h)$
- Operazione B: si impiega il capitale unitario da 0 a t (0 < t < t+h) e lo si reimpiega subito per la durata residua, da t a t+h, ottenendo il montante $f(t)f(h)$



<u>*Definizione*</u>
Le leggi f(t) per le quali i due montanti f(t)f(h) e f(t+h) sono uguali si dicono *scindibili per prodotto nel senso di Cantelli* e godono della proprietà di *scindibilità*

$$\forall t, h : 0 \leq t \leq t+h \Rightarrow f(t)f(h) = f(t+h)$$

<u>***Teorema***</u>
Una legge di capitalizzazione è scindibile se e solo se (⇔) tale legge è del tipo:

$$f(t) = e^{\delta t} = (1+i)^t$$

e inoltre, per Cantelli, *l'intensità istantanea d'interesse di tale legge deve essere costante, ovvero non deve dipendere dal tempo*:

$$\rho(t) = \delta = costante$$

Quindi:

- Il regime di interessi composti gode della proprietà della scindibilità
- Il regime di interessi semplici e quello di interessi semplici anticipati no e, in particolare:
    - Interessi semplici: $f(t_1)f(t_2) > f(t_1 + t_2)$
    - Interessi semplici anticipati: $f(t_1)f(t_2) < f(t_1 + t_2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>*Esempi riassuntivi di leggi in una variabile sul quaderno*</u></td></tr>
</table>

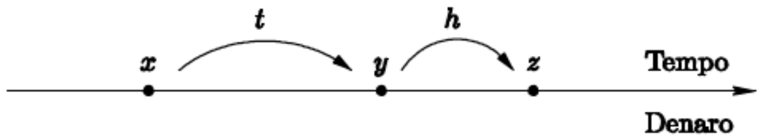
<table>
<tr>
<td>Fattore di montante di proseguimento (1 variabile)</td>
<td>

Sia f una legge di capitalizzazione qualsiasi e si consideri un impiego di capitale unitario per y anni. Il montante disponibile in y è $f(y)$.
Si consideri ora un impiego, sempre unitario per x anni, con x ≤ y; Il montante disponibile in x è $f(x)$. Se volessimo portare l'investimento da x a y, si chiama **fattore di montante di proseguimento**, il fattore di capitalizzazione che determina le condizioni di proseguimento da x a y in modo tale che le due operazioni siano equivalenti:

$$F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$$

Posto $t = x$ e $t + h = y$ otteniamo:

$$F(t, t+h) = \frac{f(t+h)}{f(t)}$$



<table>
<tr><td>Interessi Semplici</td><td>$F(x,y) = \frac{1+iy}{1+ix}$</td></tr>
<tr><td>Interessi composti</td><td>$F(x,y) = \frac{(1+i)^y}{(1+i)^x} = (1+i)^{y-x}$</td></tr>
<tr><td>Interessi anticipati</td><td>$F(x,y) = \frac{1-dx}{1-dy}$</td></tr>
</table>

N.B.: nel caso della capitalizzazione semplice si nota che il fattore di montante di proseguimento dipende separatamente da x e y, mentre in capitalizzazione composta esso è funzione della differenza tra (y-x) e quindi solo della durata del proseguimento.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">2. Leggi finanziarie in due variabili</td>
</tr>
<tr>
<td>Definizione</td>
<td>

Leggi che dipendono sia dall'epoca x di impiego che dall'epoca y di disimpiego (x ≥ y) si dicono leggi finanziarie in due variabili e si indicano con le corrispettive lettere maiuscole dell'alfabeto greco:

- $F(x,y)$ → Capitalizzazione
- $\Phi(y,x)$ → Attualizzazione

</td>
</tr>
<tr>
<td>Proprietà richieste per leggi finanziarie</td>
<td>

Livello 1. $F(x,x) = 1$ → non ci sono costi associati all'impiego e al disimpiego istantaneo
Livello 2. $F(x,x) = 1$ *e* $F(x,y) \geq 0$ → il montante è sempre positivo
Livello 3. $F(x,x) = 1$ *e* $F(x,y) \geq 0$ e $F(x,y)$ monotona crescente → il montante non solo è positivo ma cresce nel tempo
Livello 4. $F(x,x) = 1$ *e* $F(x,y) \geq 0$, $F(x,y)$ monotona crescente e , $F(x,y)$ continua e differenziabile in y, con derivata parziale di y continua → requisito di regolarità

</td>
</tr>
</table>

Fattori finanziari dei regimi usuali

	Fattore di montante	Fattore di sconto
Interessi Semplici	$F(x,y) = 1 + i_x(y-x)$	$\Phi(y,x) = \dfrac{1}{1+i_x(y-x)}$
Interessi composti	$F(x,y) = (1+i_x)^{y-x}$	$\Phi(y,x) = \dfrac{1}{(1+i_x)^{y-x}}$
Interessi anticipati	$F(x,y) = \dfrac{1}{1-d_x(y-x)}$	$\Phi(y,x) = 1 - d_x(y-x)$

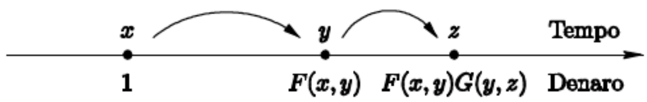
Tassi d'interesse e di sconto

Tasso d'interesse alla data x associato alla legge finanziaria F(x,y)	$i_x = F(x, x+1) - 1$
Tasso annuo di sconto alla data x associato alla legge finanziaria $\Phi(y,x)$	$d_x = 1 - \Phi(x+1, x)$

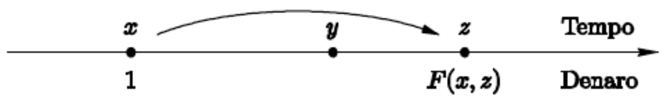
Fattore di montante di proseguimento (di Bonferroni)

Consideriamo un investimento in x che si sia protratto fino ad oggi, tempo y mediante un'operazione finanziaria $F(x,y)$; vogliamo far proseguire il nostro investimento fino ad un tempo successivo, z. Consideriamo due opzioni:

1) *Disinvestimento* in y e reinvestimento fino a z con una nuova operazione finanziaria $G(y,z)$; in questo caso il fattore di montante risulta:
$$F(x,y)G(y,z)$$



2) *Proseguimento* con la medesima operazione finanziaria F fino a z: il fattore di montante risulta:
$$F(x,z)$$



Le due operazioni sono equivalenti se e solo se:

$$F(x,y)G(y,z) = F(x,z)$$

Quello che ci domandiamo è: qual è la scelta più conveniente? Consideriamo l'operazione solo da y a z:

1) Nel primo caso, il fattore di montante del nuovo investimento è esattamente $G(y,z)$
2) Nel secondo caso, dobbiamo considerare che l'investimento prosegue seguendo una sola legge; il contributo da y a z risulta avere fattore di montante $\frac{F(x,z)}{F(x,y)}$

Allora possiamo dare la seguente definizione:

Siano x, y e z tre istanti temporali t.c. x ≤ y ≤ z. Si dice **fattore di montante di proseguimento** da y a z per un impiego iniziato in x:

$$G(x,y,z) = \frac{F(x,z)}{F(x,y)}$$

<table>
<tr><td></td><td>
E rappresenta il montante ottenuto lasciando impiegato da y a z un capitale unitario in y che risulta già essere stato impiegato all'epoca x.

Per capire se un nuovo investimento conviene rispetto a proseguire un impiego, basta confrontare il fattore di montante della nuova operazione da y a z con il fattore di montante di proseguimento del vecchio impiego G(x, y, z).

Definiamo ora i fattori di montante di proseguimento per gli impieghi standard:

<table>
<tr><td>Interessi Semplici</td><td>$G(x,y,z) = \frac{1+i_x(z-x)}{1+i_x(y-x)}$</td><td>È sempre meglio interrompere e riprendere</td></tr>
<tr><td>Interessi composti</td><td>$G(x,y,z) = \frac{(1+i_x)^{z-x}}{(1+i_x)^{y-x}} = (1+i_x)^{z-y}$</td><td>È indifferente interrompere e riprendere o proseguire</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Intensità istantanea d'interesse</td><td>
Consideriamo il seguente fattore di montante di proseguimento che descrive la differenza di crescita del capitale, investito in x, tra y e y + h.

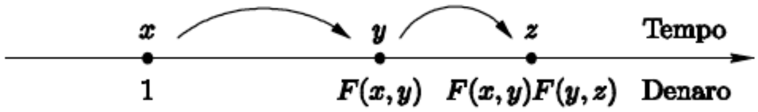
$$G(x,y,y+h) = \frac{F(x,y+h)}{F(x,y)}$$
Vogliamo trovare quel tasso d'interesse semplice τ che caratterizzi il proseguimento dell'impiego per la durata h, ovvero quel τ per cui si ha:
$$G(x,y,y+h) = 1 + \tau h$$
Def.: si dice intensità media d'interesse di F in y relativa all'incremento h e all'epoca iniziale x, la grandezza:

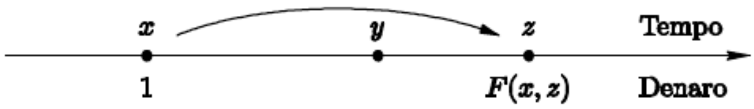
$$\tau(x,y,y+h) = \frac{F(x,y+h) - F(x,y)}{F(x,y)\cdot h}$$
Il cui limite per $h \to 0$ rappresenta l'intensità istantanea d'interesse

$$\rho(x,y) = \lim_{h\to 0} \tau(x,y,y+h) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x,y+h) - F(x,y)}{F(x,y)\cdot h}$$
E, in particolare, se F è derivabile rispetto ad y, tale limite esiste finito e risulta

$$\rho(x,y) = \frac{\frac{d}{dy}F(x,y)}{F(x,y)} = \frac{d}{dy}\ln\big(F(x,y)\big)$$
→ è il tasso semplice che caratterizza proseguimenti (in capitalizzazione semplice) molto brevi, di durata h infinitesima

Si può dimostrare che se $\rho(x,y)$ rappresenta l'intensità istantanea d'interesse, si ha che il fattore di montante associato è univocamente determinato da
$$F(x,y) = e^{\int_x^y \rho(x,s)ds}$$
Se $\rho(x,y) = \boldsymbol{\delta}$ costante, si avrebbe che
$$F(x,y) = e^{\delta(y-x)}$$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2"><u>Esempi notevoli sul quaderno</u></th></tr>
<tr><td>Scindibilità e teoremi sulle leggi scindibili</td><td>
Seguendo una legge finanziaria F, considero il tempo iniziale x e due tempi finali y e z t.c. y ≤ z; Consideriamo i due casi:
▪ Interrompo e reimpiego: il montante finale è $F(x,y)F(y,z)$


▪ Continuo l'investimento: ottengo il montante $F(x,z)$


<u>Def.:</u> la legge di capitalizzazione si dice scindibile se e solo se (⇔)
$$F(x,z) = F(x,y)F(y,z) \qquad \forall x,y,z \; con \; x \leq y \leq z$$
▪ La capitalizzazione semplice <u>non</u> è scindibile
▪ La capitalizzazione composta è scindibile

Teoremi sulle leggi scindibili: <u>criteri di scindibilità</u>

1. Scindibilità per prodotto
Si F(x,y) una legge finanziaria di livello 3. Allora F(x,y) è scindibile ⇔ F(x,y) è una legge del tipo:
$$F(x,y) = \frac{f(y)}{f(x)}$$
Dove f è la legge finanziaria in una variabile di livello 3

2. Teorema di Cantelli
Sia F(x,y) una legge finanziaria derivabile con continuità in y (livello 4). Allora F(x,y) è scindibile ⇔ la sua intensità istantanea d'interesse $\rho(x,y)$ <u>non</u> dipende da x, ma dipende solo da y

Osservazione: economicamente, il teorema di Cantelli afferma che la redditività di un impiego in un tempo y è la stessa qualunque sia l'inizio dell'impiego stesso. Se F è scindibile, allora la redditività in $y = a$ è esattamente $\rho(a)$: piccoli proseguimenti da $y = a$ fruttano tanto quanto investire con interesse semplice $i = \rho(a)$.
</td></tr>
<tr><td>Capitalizzazione attuariale</td><td>
La capitalizzazione attuariale (o contratto di assicurazione sulla vita) si basa su questo principio:
• Ciascun iscritto versa, al tempo x, una quota di iscrizione U;
• Il capitale totale raccolto viene investito da x ad una data futura concordata y (y > x);
• Al tempo y il montante maturato sarà ripartito tra i sopravvissuti;
Le grandezze che descrivono la capitalizzazione attuariale sono:
• U: quota di iscrizione
• $l(t)$: funzione di sopravvivenza; descrive il numero statistico di soggetti ancora in vita al tempo x e al tempo y ed è decrescente
Al momento y, ogni vivente riceverà il montante:
$$C = \frac{l(x)F(x,y)}{l(y)}U$$
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
Avremo quindi un fattore di montante pari a:

$$A(x,y)=\frac{l(x)F(x,y)}{l(y)}$$

Teorema
A è scindibile se e solo se F è scindibile, ovvero se $F(x,y)=\frac{f(y)}{f(x)}$

Intensità d'interesse istantanea attuariale $\rho_A(x,y)$

$$\rho_A(x,y)=\frac{\mathrm{f}\,'(x)}{\mathrm{f}(y)}-\frac{l'(y)}{l(y)}$$

dove chiameremo **intensità istantanea di mortalità**

$$\mu(y)=-\frac{l'(y)}{l(y)}$$
</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Esempi notevoli sul quaderno</u></td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Flussi di cassa</td></tr>
<tr><td>Definizione</td><td>
Sequenza di somme di denaro, in entrata e/o in uscita, che avvengono in epoche diverse

Scadenze	t_1	t_2	…	t_n
Flussi	a_1	a_2	…	a_n
</td></tr>
<tr><td>Valore Attuale (Valore Iniziale o Present Value – PV)</td><td>
Valore di flussi di cassa al tempo t_s calcolato rispetto al tempo presente (t=0)

$$V_0=a_0+a_1\varphi(t_1)+\cdots+a_n\varphi(t_n)=\sum_{s=0}^{n}a_s\varphi(t_s)$$
</td></tr>
<tr><td>Montante (Valore Finale)</td><td>
Valore di flussi di cassa al tempo $T \geq t_n$

$$V_{T_f}=a_0\mathrm{f}(T_f)+a_1\mathrm{f}(T_f-t_1)+\cdots+a_n\varphi(T_f-t_n)=\sum_{s=0}^{n}a_s\varphi(T_f-t_s)$$
</td></tr>
<tr><td>Valore intermedio in un tempo arbitrario</td><td>

Una variabile	$V(T)=\sum_{t_s\leq T}a_s\mathrm{f}(T-t_s)+\sum_{t_s\geq T}a_s\varphi(t_s-T)$
Due variabili	$V(T)=\sum_{t_s\leq T}a_sF(t_s,T)+\sum_{t_s\geq T}a_s\Phi(t_s,T)$

In particolare, in **regime di capitalizzazione composta al tasso i**

$$V(T)=\sum_{s=0}^{n}a_s(1+i)^{T-t_s}$$
</td></tr>
<tr><td>Rendita</td><td>
Successione di entrate R_s, dette **rate della rendita**, disponibili a determinate scadenze t_s

- *Temporanea* o *perpetua*
- *Immediata* o *differita*
- *A rata costante* o *variabile*
- *Periodica*
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

- *Anticipata* (entrata all'inizio del periodo) o *posticipata* (entrata alla fine del periodo)

</td></tr>
<tr><td>Rendite periodiche a rata costante (solo in regime composto)</td><td>

<table>
<tr><th></th><th>Valore attuale</th><th>Montante</th></tr>
<tr><td>Rendita posticipata</td><td>$A = a_{n\rceil i}R$

$A = \frac{1-(1+i_k)^{-n}}{i_k}R$</td><td>$M = s_{n\rceil i}R$

$M = \frac{(1+i_k)^{n}-1}{i_k}R$</td></tr>
<tr><td>Rendita anticipata</td><td>$A = \ddot{a}_{n\rceil i}R$

$A = \frac{1-(1+i_k)^{-n}}{i_k}(1+i_k)R$</td><td>$M = \ddot{s}_{n\rceil i}R$

$M = \frac{(1+i_k)^{n}-1}{i_k}(1+i_k)R$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Rendita perpetua anticipata</td><td>$A = \frac{1+i}{i}R$</td></tr>
<tr><td>Rendita perpetua posticipata</td><td>$A = \frac{1}{i}R$</td></tr>
</table>

N.B.: In una rendita in regime composto, se il numero delle rate n è diverso dal numero T di anni richiesto, è necessario *portare* tutte le rate al tempo 0 oppure al tempo n e successivamente capitalizzare fino all'anno T richiesto. In sostanza dovrò fare così:

$$M_T = V(n)(1+i)^{T-n} = V(0)(1+i)^T$$

L'idea è sempre quindi di attualizzare le rate e fare la somma dei loro valori attuali per trovare V(0) o, nel caso, V(n); successivamente sarà necessario capitalizzare fino al tempo richiesto.

N.B.: Se ci troviamo davanti ad una rendita con rate costanti di entità variabile devo considerare la rendita data come somma di due rendite. [*vedi esercizio 6 pag. 78 dispense*]

N.B.: il tasso i_k deve essere sempre riferito alla periodicità della rata. Come già sappiamo, noto il tasso annuo risulta:

$$i_m = \sqrt[m]{(1+i)} - 1$$

Quindi possiamo affrontare anche scadenze non annuali ma anche bimestrali, trimestrali, quadrimestrali, semestrali [*esercizio 5 pag. 77 dispense*]

</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Esempi notevoli sul quaderno</u></td></tr>
</table>

DCF (Discounted Cash Flow)	Dati i flussi di cassa $a_0, a_1, \dots, a_n$ alle rispettive scadenze $t_0, t_1, \dots, t_n$, la somma algebrica dei valori attuali in $t = 0$ dei suoi movimenti di cassa, calcolati rispetto ad un tasso d'interesse composto x (è una **funzione**), si dice ***discounted cash flow*** (è il PV di un'intera operazione finanziaria) $$DCF(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s (1+x)^{-t_s} \quad x \in (-1, +\infty)$$ Esso equivale al valore dell'operazione finanziaria al tempo presente, ovvero il valore che se incassato ora lascia indifferente tra incassarlo e partecipare all'operazione finanziaria Si chiama **saldo contabile** il $$DCF(0) = \sum_{s=0}^{n} a_s$$
VAN (Valore attuale netto)	Il VAN è il DCF di un'operazione finanziaria calcolato per un ben specifico $x = i$ detto ***costo-opportunità dell'investimento***; è quel tasso al quale sarebbero impiegati i mezzi finanziari se essi non fossero assorbiti da altre operazioni $$DCF(i) = VAN = \sum_{s=0}^{n} a_s (1+i)^{-t_s} \quad x \in (-1, +\infty)$$ Proprietà Date due operazioni finanziarie A e B ▪ $VAN_{A+B} = VAN_A + VAN_B$ ▪ $VAN_{\alpha A} = \alpha \cdot VAN_A$ Osservazione importante Si immagini di avere la possibilità di investire un certo capitale C al tasso d'interesse i oppure di avere un investimento A con un determinato DCF. Che cosa conviene fare? Calcolando il VAN al tasso d'interesse i dell'investimento A è possibile comprendere la sua convenienza (il VAN rappresenta il **guadagno/perdita immediata**): ▪ $VAN(i) > 0 \rightarrow$ l'investimento è più conveniente rispetto a investire C al tasso i ▪ $VAN(i) < 0 \rightarrow$ l'investimento è meno conveniente rispetto a investire C al tasso i ▪ $VAN(i) = 0 \rightarrow$ è indifferente investire o meno
TIR (Tasso interno di rendimento)	Si chiama ***tasso interno di finanziamento (IRR – Internal Rate of Return)*** una soluzione $\boldsymbol{x^*} > \boldsymbol{-1}$ dell'equazione: $$DCF(x) = 0$$ (è uno zero del DCF). Tale equazione può presentare: ▪ Nessuna soluzione ▪ Una soluzione ▪ Più soluzioni Saranno accettabili le x* t.c. $x^* > -1$ **N.B.:** Spesso occorre eseguire il comune denominatore con $(1+x)^{t_s}$ e, successivamente, ricavare un'equazione di secondo grado imponendo $(1+x)^{t_s} = t$ nel modo più appropriato Il TIR è quindi quel tasso d'interesse che attribuisce all'operazione finanziaria un valore nullo e, quindi, si è indifferenti tra parteciparvi o meno

Proprietà

- $TIR_{-A} = TIR_A$
- $TIR_{\alpha A} = TIR_A$ (operatore non omogeneo: α sparisce)

N.B.: spesso capitano **esercizi con parametri** nei quali un flusso è lasciato incognito e si chiede di determinare tale flusso, in funzione di un dato tasso implicito i (=TIR). Basta calcolare il DCF in x=i, porre uguale a 0 e risolvere in funzione del parametro.

Investimento

→ *Operazione finanziaria avente un'uscita iniziale seguita da un certo numero di entrate*

Scadenze	0	1	...	n
Importi	$a_0 < 0$	$a_1 > 0$	...	$a_n > 0$

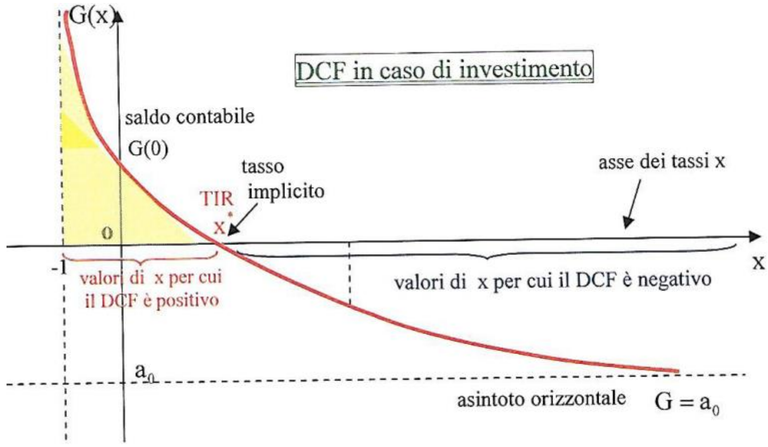
Sia $G(x)$ il DCF dell'investimento, x il tasso d'interesse dell'investimento e $x = x^*$ il TIR dell'investimento

$$DCF(x) = G(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s(1+x)^{-t_s} - |a_0|$$

L'investimento è:

- Conveniente se $x < x^* \to G(x) > 0$
- Non conveniente se $x > x^* \to G(x) < 0$
- Indifferente se $x = x^* \to G(x) = 0$

$G(x)$ è strettamente decrescente e convessa



E in particolare:

- $G(0) = \sum_{s=1}^{n} a_s - |a_0|$ (**saldo contabile** = somma di tutti i flussi di cassa)
- $\lim_{x \to +\infty} G(x) = a_0$
- $\lim_{x \to -1^+} G(x) = +\infty$ (asintoto verticale: $x = -1$

N.B.: per valutare se il TIR è maggiore o minore ad una determinata soglia i, basterà calcolare il DCF in i e, se si riferisce ad un ***investimento*** (DCF è decrescente):

- $DCF(i) > 0 \to$ il TIR supera la soglia
- $DCF(i) < 0 \to$ il TIR non supera la soglia, ed è inferiore

Finanziamento

→ *Operazione finanziaria avente un'entrata iniziale seguita da un certo numero di pagamenti*

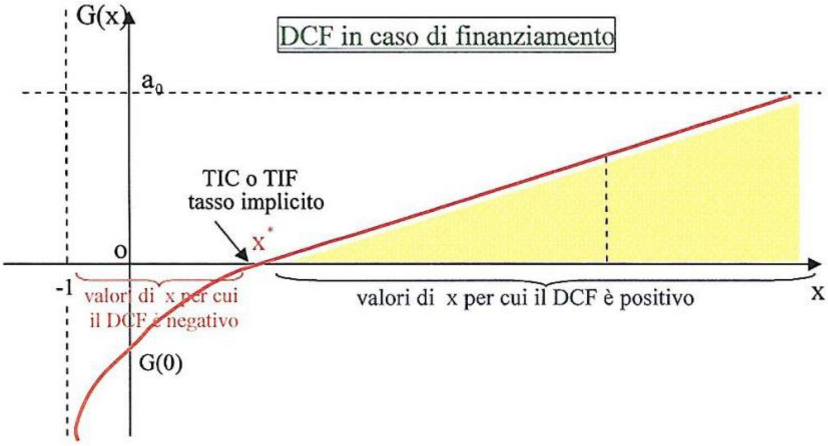
Scadenze	0	1	...	n
Importi	$a_0 > 0$	$a_1 < 0$	...	$a_n < 0$

Sia $G(x)$ il DCF dell'investimento, x il tasso d'interesse del finanziamento e $x = x^*$ il TIR del finanziamento

$$DCF(x) = G(x,R) = a_0 - \left|\sum_{s=1}^{n} a_s(1+x)^{-t_s}\right|$$

Il finanziamento viene:
- Accettato se $x > x^*$
- Rifiutato se $x < x^*$
- Indifferente se $x = x^*$

$G(x)$ è strettamente crescente e concava



In particolare:
- $G(0) = a_0 - |\sum_{s=1}^{n} a_s|$ (**saldo contabile** = somma di tutti i flussi di cassa)
- $\lim_{x \to +\infty} G(x) = a_0$
- $\lim_{x \to -1^+} G(x) = +\infty$ (asintoto verticale: $x = -1$)

N.B.: per valutare se il TIR è maggiore o minore ad una determinata soglia i, basterà calcolare il DCF in i e, se si riferisce ad un ***finanziamento*** (DCF è decrescente):
- $DCF(i) > 0 \rightarrow$ il TIR non supera la soglia, ed è inferiore
- $DCF(i) < 0 \rightarrow$ il TIR supera la soglia

Esempi notevoli sul quaderno

4. AMMORTAMENTI

Definizione

Si dice **ammortamento** il processo di estinzione di un debito mediante il pagamento al creditore di rate, comprendenti sia una quota di capitale sia gli interessi maturati del debito fino a quel punto.

In particolare, indichiamo con:

R_t	Rata da pagare in t (alla fine dell'anno t) prevista dall'ammortamento
C_t	Quota capitale contenuta nella rata R_t
I_t	Quota interesse contenuta nella rata R_t
D_0	Somma S finanziata con l'ammortamento
D_t	Debito residuo in t (all'inizio dell'anno t, dopo aver pagato R_t)
E_t	Debito estinto in t (all'inizio dell'anno t, dopo aver pagato R_t)

Piano di ammortamento

Si chiama piano di ammortamento una tabella così costruita:

anno	debito r.	rata	q. cap	q. int.	debito e.
0	D_0	0	0	0	0
1	D_1	R_1	C_1	I_1	E_1
2	D_2	R_2	C_2	I_2	E_2
...	...	...	...	...	...

Vedremo a breve le formule di calcolo per la costruzione del piano di ammortamento

Modalità di rimborso

Data una quota S e un generico fattore di montante ƒ(t), è possibile rimborsare tale quota in tre modalità

1) Rimborso globale
2) Rimborso periodico degli interessi e, alla scadenza, l'importo rimanente del debito contratto
3) Pagamento periodico di rate costituite sia da interessi sia da rimborsi parziali del debito (**ammortamento graduale**)

Noi ci occuperemo, qui, solo dell'ultimo caso

Legami di base di un ammortamento

$$R_t = C_t + I_t \qquad S = D_t + E_t$$

Condizioni di chiusura di un ammortamento graduale

a) Condizione di chiusura elementare

$$S = \sum_{t=1}^{n} C_t$$

b) Condizione di chiusura finanziaria

i. Iniziale

$$S = \sum_{s=1}^{n} R_s \Phi(t_s)$$

ii. Finale

$$S * F(t_n) = \sum_{s=1}^{n} R_s F(t_n - t_s)$$

Vale identicamente per 2 variabili.

Teorema

Le due condizioni di chiusura finanziaria sono equivalenti solo quando ci troviamo in capitalizzazione composta.

Osserviamo le due condizioni di chiusura finanziaria in **capitalizzazione composta**:

i. Elementare

$$S = \sum_{t=1}^{n} C_t$$

ii. Finanziaria iniziale

$$S = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{-t}$$

iii. Finanziaria finale

$$S(1+i)^n = \sum_{s=1}^{n} R_s (1+i)^{n-t}$$

Formule e relazioni validi per ammortamenti posticipati in <u>regime composto</u>	Quota di capitale: $C_t = R_t - I_t$ Quota d'interessi: $I_t = iD_{t-1}$ Rata: $R_t = C_t + I_t$ Debito estinto: $E_t = \sum_{s=1}^{t} C_s$ Debito residuo: $D_0 = S$; $D_t = D_{t-1} - C_t$; $D_t = (1+i)D_{t-1} - R_t$
Costituzione di un piano di ammortamento	1) **Impostazione elementare**: si fissano *<u>quote di capitale</u>* sfruttando l'unica condizione di chiusura elementare e tramite le relazioni di base si costruisce la tabella. 2) **Impostazione finanziaria**: si fissano le *<u>rate</u>* sfruttando la condizione di chiusura finanziaria e, con le relazioni di base, si costruisce la tabella N.B.: il tasso d'interesse deve essere riferito alla periodicità delle rate (mensile, semestrale, annuale…)
<u>Guarda bene gli esercizi sulla dispensa Ghelma pag. 49-50</u>	
Relazioni di ricorrenza tra debiti residui	a) Relazione di ricorrenza tra debiti residui <u>note le rate</u> $\begin{cases} D_0 = S \\ D_{t+1} = D_t(1+i) - R_{t+1} \end{cases}$ N.B.: se le rate fossero a rimborso semestrale (ad esempio) e non annuali, occorrerebbe inserire il tasso d'interesse periodale equivalente ad *i* b) Relazione di ricorrenza tra debiti residui <u>note le quote di capitale</u> $\begin{cases} D_0 = S \\ D_t = D_{t-1} - C_t \end{cases}$
Ammortamento italiano (uniforme)	Le **quote di capitali sono costanti** $\boldsymbol{C_t = C}$; la <u>condizione di chiusura elementare</u> impone che: $C = \frac{S}{n}$ A cui si aggiungono utili formule: Quota di interessi $I_t = iD_{t-1} = \frac{n-t+1}{n} * S * i$ Debito residuo al tempo t $D_t = S - E_t = S\frac{n-t}{n}$ Per calcolare un ammortamento italiano: ▪ Si calcola **dapprima la quota di capitale C** ▪ Si completa il piano di ammortamento utilizzando le formule date in precedenza calcolando, nell'ordine: ○ Quota d'interesse, I ○ Rata, R ○ Nuovo debito residuo, D Si chiama ***monte interessi MI*** la somma algebrica di tutti gli interessi pagati $MI = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ *Esempio pag. 83 dispense*

Ammortamento francese (progressivo)	Le **rate sono costanti** e la condizione di chiusura iniziale richiede che: $$R * a_{n\rceil i} = S \rightarrow R = \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} S$$ (infatti, dal punto di vista di chi finanza, è una rendita periodica posticipata con $V(0) = S$). Senza ricordare la formula è possibile ricavare R scrivendo *a mano* il valore attualizzato della rendita. Noto S, si avrà: $$S = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$ Che basta risolvere in R. Per calcolare il piano d'ammortamento alla francese devo **partire dalla rata R** e procedere poi con gli altri valori. Aggiungiamo tre formule utili: $$D_t = D_{t-1}(1+i) - R \rightarrow \text{formula ricorsiva}$$ $$C_t = R(1+i)^{-n+t-1}$$ $$I_t = R - C_t$$ *Esempio pag. 83 dispense 6*
Tasso contrattuale	Coincide con il suo tasso interno e si dice TIF (*Tasso Interno di Finanziamento*). Esso, quindi, è semplicemente uno zero del $DCF(x)$ del finanziamento analizzato.
Ammortamento con profilo temporale delle rate	Quando sono fissati i rapporti tra le rate: $R_1 = \rho_1 R, R_2 = \rho_2 R, \ldots, R_n = \rho_n R$, il vettore $(\rho_1 \ldots \rho_n)$ è detto ***profilo temporale delle rate*** e l'ammortamento è detto *ammortamento con profilo temporale delle rate*. La **condizione di chiusura iniziale** diventa $$S = \sum_{t=1}^{n} \rho_t R(1+i)^{-t}$$ Da cui si può ricavare R (è un'equazione di primo grado in R) e quindi tutte le rate
Cambio del piano di ammortamento	Può essere che, una volta iniziato un finanziamento, si arrivi ad un anno t in cui si scegli di cambiare le condizioni dell'ammortamento. Basta semplicemente procedere al nuovo piano di ammortamento ripartendo dal debito residuo D rimanente. La seguente formula permette di calcolare il debito residuo in t: $$D_t = \sum_{s=t+1}^{n} R_s(1+i)^{t-s}$$

Credito al consumo	È la vendita di un bene di consumo con pagamento a rate. L'operazione si struttura così: • A: valore o prezzo del bene • B: anticipo iniziale (di solito è una percentuale del valore del bene) • $A - B = S$: Importo finanziato (netto del finanziamento) • R_s: rata di rimborso alla scadenza t_s • t_s: scadenza delle rate (generalmente mensile) • $\varphi(t_s) = \begin{cases} (1+i)^{-t_s} & \rightarrow \text{sconto composto} \\ 1 - dt_s & \rightarrow \text{sconto commerciale} \end{cases}$ Deve essere soddisfatta la **condizione di chiusura finanziaria iniziale** $$A - B = \sum_{s=1}^{n} R_s\, \varphi(t_s) \rightarrow \text{con cap. composta} \rightarrow A - B = \sum_{s=1}^{n} R_s\,(1+i)^{-t_s}$$ Possiamo distinguere due casi: 1) A rate costanti → $R_s = R \ \ \forall s$ $$R = \frac{(A-B)i_k}{1-(1+i_k)^{-n}} \rightarrow \text{regime composto}$$ $$R = \frac{A-B}{n - d\frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow \text{regime commerciale}$$ 2) A rate proporzionali tra loro → $R_s = R_1 \rho_s \ \ \forall s$ Normalmente tutte le rate sono proporzionali alla prima mediante il **vettore dei profili** $$[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n] \rightarrow R_n = \rho_n R_1$$ Così che le rate sono: $$R_1 = \frac{A-B}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s (1+i)^{-s}} \rightarrow \text{Regime composto}$$ $$R_1 = \frac{A-B}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s (1-ds)} \rightarrow \text{Regime commerciale}$$
Leasing	È un contratto di locazione-vendita, in base al quale una società proprietaria di determinati beni mobili o immobili (il *lessor*), concede ad un'altra società o persona fisica il pieno godimento del bene dietro il versamento di una caparra iniziale più un canone a determinate scadenze. Alla fine del periodo, il locatario ha facoltà di scegliere tra: • Rinnovo della locazione • Restituzione • Riscatto Il leasing ha la seguente **struttura finanziaria** • A: valore iniziale di fornitura in t=0 • B: eventuale anticipo (in contanti) • C_s: canone di leasing (posticipato) all'epoca t_s • C_{n+1}: canoni di leasing anticipati in sostituzione dell'anticipo B in contanti • E: valore del riscatto (una percentuale di A) • i: tasso annuo d'interesse composto In genere si fa uso del **regime composto**.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Condizione di **chiusura finanziaria iniziale** (con T, tempo di termine del contratto di leasing)

1) Con anticipo B in contanti

$$A = B + \sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{-t_s} + E(1+i)^{-T}$$

2) Con canoni di leasing anticipati

$$A = \sum_{s=1}^{r} C_s (1+i)^{-t_s} + \sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{-t_s} + E(1+i)^{-T}$$

Calcolo dei canoni

Ricorda:

$$a_{n\rceil i_k} = \frac{1-(1+i_k)^n}{i_k}$$

1) CANONI COSTANTI

$$C = \frac{A - B - E(1+i)^{-T}}{a_{n\rceil i_k}} \rightarrow \text{con anticipo in contanti}$$

$$C = \frac{A - E(1+i)^{-T}}{r + a_{n\rceil i_k}} \rightarrow \text{con } r \text{ canoni anticipati}$$

2) CANONI CON PROFILI

Dato il *vettore dei profili* $[\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]$ basta determinare il primo canone per determinarli tutti. Quindi:

$$C_1 = \frac{A - B - E(1+i)^{-T}}{\sum_{s=1}^{n} \rho_s (1+i)^{-s}} \rightarrow \text{con anticipo in contanti}$$

$$C_1 = \frac{A - E(1+i)^{-T}}{\sum_{s=1}^{r} \rho_{n+s} + \sum_{s=1}^{n} \rho_s (1+i)^{-s}}$$

N.B.: ricorda di riferire sempre il tasso d'interesse alla periodicità dei canoni.

Si dice **costo del leasing** la somma di tutti i canoni + E + B – A

$$L = \sum_{s=1}^{n} C_s + E + B - A$$

Si dice **costo del leasing relativo** il rapporto

$$L_{relativo} = \frac{L}{A}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>TAEG</td>
<td>

Il **Tasso Annuo Effettivo Globale** è quel tasso annuo effettivo che rende la somma dei valori attuali di tutti gli importi erogati verso il cliente (al netto delle spese) uguale alla somma dei valori attuali di tutte le rate di rimborso → è il TIR dell'operazione complessiva e misura il costo complessivo del finanziamento con i costi accessori.

Tra i costi accessori annoveriamo:

- Costi di istituzione della pratica da pagare in $t_0 = 0$
  - Proporzionali al finanziamento → αS

</td>
</tr>
</table>

- ○ Indipendenti dal finanziamento → β
- Costi d'incasso delle rate da pagare alle varie scadenze t_n
  - ○ Proporzionale all'ammontare delle rate → γR_s
  - ○ Indipendenti dalle rate → δ

Impostando il DCF(x) abbiamo:

$$G(x) = -S + \alpha S + \beta + \sum_{k=1}^{n} (R_k + \gamma R_k + \delta)(1+x)^{-t_s}$$

Il TAEG è uno zero dell'equazione del DCF *con costi accessori*; il TAN è uno zero dell'equazione del DCF *senza costi accessori*

N.B.: essendo un DCF considera bene che si tratti di un finanziamento (entrata iniziale a cui seguono n rate in uscita) o di un investimento (uscita iniziale a cui seguono n rate in entrata)

MATEMATICA FINANZIARIA – PARTE B

5. TITOLI A REDDITO FISSO

Titoli Senza Cedole (*Zero Coupon Bonds*)

Caratteristiche

Un **titolo senza cedole** (***zero coupon bonds***) sono caratterizzati da:

- Valore nominale N di rimborso
- Scadenza T dello ZCB
- Prezzo di emissione P_0 al tempo $t_0 = 0$
- Prezzo del titolo P_t ad una scadenza intermedia t

Un esempio è il BOT (Buono Ordinario del Tesoro) italiano

Rendimenti

I. **A SCADENZA** → è il rendimento semplice annuo $\boldsymbol{r_{t,T}}$ che caratterizza uno ZCB impiegato da $\boldsymbol{t \geq 0}$ fino alla data della sua naturale scadenza T

$$P_t[1 + r(T-t)] = N$$

Da cui:

$$r_{t,T} = \frac{N - P_t}{P_t(T-t)} \quad \Big| \quad P_t = \frac{N}{1 + r_{t,T}(T-t)}$$

Nel caso in cui valutassimo l'impiego da t = 0 fino alla naturale scadenza, potremo trovare anche il prezzo di emissione P_0 secondo la relazione:

$$P_0\left(1 + r_{0,T}T\right) = N$$

N.B.: chiamiamo ***capital gain*** la differenza:

$$G = N - P_0$$

N.B.: se utilizziamo la <u>*capitalizzazione composta*</u> per valutare il ***rendimento effettivo composto*** varrà la relazione:

$$P_0(1+r)^T = N$$

Da cui:

	$$i_c = \left(\frac{N}{P_0}\right)^{\frac{1}{T}} - 1 \qquad P_0 = \frac{N}{(1+i_c)^T}$$ II. **DA COMPRAVENDITA** → è il rendimento semplice annuo $\boldsymbol{r_{0,t}}$ che caratterizza un impiego da t=0 fino a t < T $$P_t = P_0(1 + r_{0,t}t)$$ Da cui: $$r_{t,T} = \frac{P_t - P_0}{P_0 t} \quad \Big\vert \quad P_0 = \frac{P}{1 + r_{t,T}t}$$
Tassazione sui titoli	La tassazione (**imposta**) sui titoli è proporzionale al *capital gain*: $$I = \tau(N - P_0)$$ La tassa può essere pagata in due modi diversi; ciascuno di questi modi determina un diverso rendimento: • **Ritenuta all'emissione**: pago la tassa in anticipo, al momento dell'acquisto del titolo (aumenta il prezzo di acquisto). Detto B_0 il nuovo prezzo, sia: $$P_0' = P_0 + I = P_0 + \tau(N - P_0)$$ Il *rendimento netto* è: $$r_{0,t}^* = \frac{N - P_0'}{P_0' T}$$ • **Ritenuta al rimborso**: pago una volta che ho venduto il titolo e ottenuto il rimborso (diminuisce il nominale). Il nominale diminuisce della tassazione così che: $$N' = N - \tau(N - P_0)$$ Il *rendimento netto* è: $$r^{**}{}_{0,T} = \frac{N' - P_0}{PT} > r_{0,t}^*$$
Titoli Con Cedole (*Coupon Bonds*)	
Caratteristiche	I titoli con cedole sono caratterizzati da: • $t_k, K = 1,2, \dots, n$ → scadenza periodiche cedolari • $\pi = t_{k+1} - t_k$ → tempo che intercorre tra due scadenze cedolari (pagamenti trimestrali semestrali, annuali…) • $T = t_n$ → scadenza naturale del titolo • R → valore di rimborso • c → cedola costante • N → valore nominale del titolo ottenuto alla scadenza del titolo; il titolo si dice: $$\text{rimborsato} \begin{cases} \text{alla pari se } R = N \\ \text{sopra la pari} R > N \rightarrow N - R = \text{Premio al rischio} \\ \text{sotto la pari } R < N \end{cases}$$

	• $E \rightarrow$ prezzo di emissione • $j \rightarrow$ tasso cedolare o nominale; è il tasso d'interesse semplice annuo che, applicato al nominale, determina l'importo della cedola fissa: $$c = Nj\pi$$ • $x^* \rightarrow$ rendimento annuo del titolo (tasso al quale si calcola il corso tel quel e il corso secco)
Rateo	Ogni cedola in maturazione può essere ripartita in due parti dette *ratei* • $R_p \rightarrow$ rateo del *tempo passato dallo stacco dell'ultima cedola* $p = t - t_k$ • $R_f = c - R_p \rightarrow$ rateo del tempo futuro che deve trascorrere prima dell'incasso della successiva cedola $f = t_{k+1} - t$ Vale la relazione: $$R_p = Njp = c\frac{p}{\pi}$$ $$R_f = c - R_p = c\left(1 - \frac{p}{\pi}\right)$$
Flussi di cassa di un titolo	Per definire i flussi di cassa di un titolo si procede a ritroso: • Si individua il periodo π della cedola (annuale, semestrale, trimestrale…) • Si individua la data di scadenza naturale T del titolo • Si inizia a costruire la tabella: dapprima inseriamo nell'ultima colonna la scadenza naturale; successivamente, si indietreggia seguendo il periodo fino ad arrivare al presente (t = 0). Se, a causa del periodo, finissimo oltre t = 0, segnammo la prima occorrenza in rosso e con il segno - e ci fermiamo (sarà utile per comprendere il rateo) • Individuiamo il prezzo della singola cedola e inseriamo i flussi delle cedole; nel particolare caso in cui si abbia *rimborso alla pari*, l'ultima cedola sarà la cedola c aumentata del nominale N
Prezzo o corso *tel quel*	Il valore attuale al tempo t dei pagamenti futuri prodotti da un titolo con cedole si chiama ***prezzo o corso tel quel*** P_t Il tasso con cui tale valore attuale è calcolato viene detto ***rendimento effettivo annuo del titolo (x*)***, ed è il tasso interno dell'operazione finanziaria corrispondente. $$P_t = DCF(r) \rightarrow$$ $$P_t = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{c}{(1+x^*)^{t_s}} + \frac{V_R + c}{(1+x^*)^T}$$ con $V_R = N + R$ Per calcolare il prezzo *tel quel* occorre: • Calcolare l'importo delle singole cedole • Calcolare il DCF al tasso i pari al *rendimento effettivo* • L'importo calcolato è il *prezzo tel quel* riferito ad una specifica data (per esempio il prezzo tel quel in t = 0 lo indichiamo con P_0) [*vedi esercizio 6.2.3 pag. 105 dispense Tonoli*]

Prezzo o corso *secco*	Il ***prezzo o corso secco*** S_t è il *prezzo tel quel* diminuito della parte di cedola maturata fino all'atto della vendita; tale parte è detta ***rateo*** e corrisponde agli interessi spettanti teoricamente al precedente proprietario, seppur fittizi e non corrisposti. $$S_t = \sum_{s=1}^{n} \frac{c}{(1+x^*)^{t_s}} + \frac{V_R}{(1+x^*)^T}$$ Esiste una relazione tra il prezzo *tel quel* e il prezzo *secco*: $$P_{tc} = S_t + R_p$$
Rendimenti di un titolo a cedola fissa	1) RENDIMENTO IMMEDIATO È il tasso composto annuo r* che misura il rendimento cedolare rispetto al corso secco in t≥0 $$r^* = \left(1 + \frac{c}{S_t}\right)^{\frac{1}{\pi}} - 1$$ 2) RENDIMENTO EFFETTIVO È il tasso composto annuo x* che misura il rendimento del titolo nel suo complesso → è il TIR dell'investimento in titoli $$x^* = x\ t.c.\ G(x) = -P_t + \sum_{s=1}^{n} c(1+x)^{-t_s} + R(1+x)^{-t_n} = 0 \rightarrow$$ $$P_t = \sum_{s=1}^{n} c(1+x^*)^{-t_s} + R(1+x^*)^{-t_n}$$ N.B.: si chiama *investimento a redditi staccati* un investimento con flusso di cassa del tipo: anni/semestri: 0 | 1 | 2 | ... | n flussi: -N | c | c | ... | c + N E ha un tasso interno pari al suo rendimento immediato: $$x^* = r^* = \begin{cases} \frac{c}{N} & se\ \pi = 1 \\ \left(1 + \frac{c}{N}\right)^2 & se\ \pi = \frac{1}{2} \end{cases}$$

6. STRUTTURE A TERMINE

Mercato senza attriti	Si dice ***mercato senza attriti*** un mercato di titoli in cui valgono le seguenti ipotesi: • Non vi sono imposte o costi di transazione nella compravendita dei titoli • I titoli possono essere acquistati e venduti in qualsiasi quantità • I titoli possono essere acquistati o venduti *allo scoperto*, ovvero sostenendo il flusso previsto dai titoli, senza che effettivamente il titolo sia posseduti dal venditore • Il mercato è *senza arbitraggio*: gli investitori sono, quindi, investitori razionali

Prezzo e tassi *spot* (o *a pronti*)

È il prezzo immediato di un **titolo ZCB** che comporta un pagamento immeditato ed un rimborso unitario in t:

$$v^{(0)}(0, t_s)$$

L'insieme dei prezzi *spot* al variare del tempo t >0 viene detta ***struttura a termini dei prezzi (STP) spot*** vigente nel mercato al tempo 0

$$V = \{v^{(0)}(0,1), v^{(0)}(0,2), v^{(0)}(0,3), \dots, v^{(0)}(0, t)\}$$

Questa è una ***funzione discreta*** che gode delle seguenti proprietà:

- $v^{(0)}(0,0) = 1$
- $v^{(0)}(0, +\infty) = 0$
- $v^{(0)}(0, t_s)$ è decrescente rispetto alla scadenza t → $v^{(0)}(0, t_s) > v^{(0)}(0, t_{s+1})$

Lo (0) all'apice indica l'istante di valutazione, ovvero l'istante t=0. Quindi generalizzando possiamo dire che il ***prezzo spot*** o ***a pronti*** al tempo *s* è:

$$v^{(s)}(s, t_s)$$

Si chiamano invece ***tassi spot*** i tassi composti di ZCB disponibili al tempo s per un impiego immediato in s e termine in t:

$$h^{(s)}(s, t_s)$$

L'insieme dei prezzi *spot* al variare del tempo t >0 viene detta ***struttura a termini dei tassi (STT) spot*** vigente nel mercato al tempo 0

$$H = \{h^{(0)}(0,1), h^{(0)}(0,2), h^{(0)}(0,3), \dots, h^{(0)}(0, t)\}$$

Se $h^{(0)}(0, t) = h$ per ogni scadenza t, si dice che la ***struttura per scadenza è piatta***

Relazione tra tasso e prezzo *spot*
Nel caso in cui il nominale è esattamente N=1, vale la relazione

$$v^{(0)}(0, t_s) = \frac{1}{[1 + h^0(0, t_s)]^t}$$

E tale scrittura equivale al ***fattore di sconto*** e definisce il ***prezzo d'acquisto*** di un titolo che il mercato offre *oggi*, scadenza in *t* e nominale N=1:

$$P^0(0, t_s) = v^{(0)}(0, t_s) * N \rightarrow v^{(0)}(0, t_s) = \varphi(t_s, 0) \rightarrow F(0, t_s) = \frac{1}{\varphi(t_s, 0)} = [1 + h^0(0, t_s)]^t$$

Formule importanti

Formule fondamentali con $N = 1$

Dal regime di capitalizzazione composta $C = (1 + i)^t = M$ segue:

$$v^{(0)}(0, t_s)[1 + h^0(0, t_s)]^t = 1$$

Prezzo spot ZCB con N=1	$v^{(0)}(0, t_s) = \frac{1}{[1 + h^0(0, t_s)]^t}$
Tasso spot ZCB con N=1	$h^0(0, t_s) = \left[\frac{1}{v^{(0)}(0, t_s)}\right]^{\frac{1}{t_s}}$

<table>
<tr><td></td><td>Tasso istantaneo spot</td><td>Poiché in regime composto vale che $\delta = \ln(1+i)$ risulta:
$$\delta^{(0)}(0,t_s) = \ln[1 + h^0(0,t_s)]$$
$$h^0(0,t_s) = e^{\delta^{(0)}(0,t_s)} - 1$$</td></tr>
<tr><td>Prezzo forward</td><td colspan="2">SI dice prezzo forward o a termine, il prezzo vigente in k di un'obbligazione che comporta il suo pagamento in s ed un rimborso unitario in t:
$$v^{(k)}(s,t)$$
L'insieme dei prezzi forward è detta struttura a termine dei prezzi forward vigente nel mercato al tempo k</td></tr>
<tr><td>Arbitraggio</td><td colspan="2">SI dice che un mercato presente arbitraggio se sussiste la possibilità di ricavare guadagni, vendendo e acquistando titoli allo scoperto, cioè vendendo/comprando il nominale del titolo, senza possederlo davvero.

Nei mercati reali, l'arbitraggio non esiste, dal momento che gli operatori sono razionali. Infatti, pensiamo che esistano due titoli, A e B, aventi un prezzo pari a $v_a > v_b$.
È ragionevole supporre che, se gli operatori nel mercato sono razionali, la domanda di A terminerà a breve, mentre quella di B crescerà alle stelle. Se gli agenti emissari dei titoli sono razionali, dovranno riallineare i prezzi per tener conto di ciò e fare incontrare domanda e offerta, e in breve termine i due prezzi saranno uguali. Ciò spiega come l'assenza di arbitraggio è un'ipotesi conseguente alla razionalità degli operatori.</td></tr>
<tr><td>Replicazione di titoli e ipotesi di non arbitraggio</td><td colspan="2">Si chiama replicazione di titoli un'operazione finanziaria che permette di avere un guadagno senza esborso (arbitraggio) mediante contratti forward di questo tipo:
<table>
<tr><td>Anni</td><td>0</td><td>s</td><td>t</td></tr>
<tr><td>Importo</td><td>0</td><td>$-v^{(0)}(s,t)$</td><td>1</td></tr>
</table>
Per prima cosa acquistiamo, in 0, un nominale unitario di ZCB a scadenza t, spendendo $v^{(0)}(0,t)$
<table>
<tr><td>Anni</td><td>0</td><td>s</td><td>t</td></tr>
<tr><td>ZCB da 0 a t</td><td>$-v^{(0)}(0,t)$</td><td></td><td>1</td></tr>
</table>
Copriamo l'uscita iniziale, vendendo allo scoperto uno ZCB a scadenza s. Siccome un nominale unitario ha prezzo $v^{(0)}(0,t)$, vendendone esattamente $\frac{v^{(0)}(0,t)}{v^{(0)}(0,s)}$, incassiamo $v^{(0)}(0,t)$:
<table>
<tr><td>Anni</td><td>0</td><td>s</td><td>t</td></tr>
<tr><td>ZCB da 0 a t</td><td>$-v^{(0)}(0,t)$</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>ZCB da 0 a s</td><td>$v^{(0)}(0,t)$</td><td>$-\frac{v^{(0)}(0,t)}{v^{(0)}(0,s)}$</td><td></td></tr>
</table>
Il flusso in totale sarà:
<table>
<tr><td>Anni</td><td>0</td><td>s</td><td>t</td></tr>
<tr><td>ZCB da 0 a t</td><td>$-v^{(0)}(0,t)$</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>ZCB da 0 a s</td><td>$v^{(0)}(0,t)$</td><td>$-\frac{v^{(0)}(0,t)}{v^{(0)}(0,s)}$</td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Totale	0	$-\frac{v^{(0)}(0,t)}{v^{(0)}(0,s)}$	1

Che rappresenta un *contratto forward* che impiega $\frac{v^{(0)}(0,t)}{v^{(0)}(0,s)}$ in s, per ottenere 1 in t
In pratica abbiamo fatto questa operazione
Nel caso in cui non fosse possibile fare arbitraggio, **impiegare da 0 a s e, immediatamente da s a t, deve offrire lo stesso rendimento** (condizione equivalente al fattore di montante)

$$v^{(0)}(s,t) = \frac{v^{(0)}(0,t)}{v^{(0)}(0,s)}$$

E ricordando le rispettive formule che legano tali prezzi ai corrispettivi tassi d'interesse, si avrà che (*tassi uniperiodali*):

$$\left[1 + h^{(0)}(s,t)\right]^{t-s} = \frac{\left[1 + h^{(0)}(0,t)\right]^{t}}{[1 + h^{(0)}(0,s)]^{s}}$$

Da cui:

$$h^{(0)}(s,t) = \left[\frac{1}{v^{(0)}(s,t)}\right]^{\frac{1}{t-s}} - 1$$

N.B.: il **fattore di montante** da s a t è pari a:

$$F(s,t) = \left[1 + h^{(0)}(s,t)\right]^{t-s} = \frac{1}{v^{(0)}(s,t)} \rightarrow v^{(0)}(s,t) * [1 + h^{0}(s,t)]^{t-s} = 1$$

Quindi, in un mercato senza frizioni e senza arbitraggio la struttura dei prezzi spot determina la struttura dei prezzi forward, mediante la proprietà di scindibilità dei fattori di sconto

Struttura piatta dei tassi
Un mercato ha una struttura piatta dei tassi quando tutti i tassi nella struttura (spot e quindi anche forward) sono uguali ad un unico tasso i, detto proprio per questo tasso di mercato.

$$h^{(0)}(0,t) = i \ \ per\ ogni\ t > 0$$

Generalizzazione della replicazione
Dato un qualsiasi flusso di cassa:

Anni	1	2	...	T
Importo	R_1	R_2	...	R_T

In assenza di arbitraggio il prezzo *tel quel* al tempo t = 0 dell'obbligazione deve essere (*prezzo di non arbitraggio*):

$$P_0 = \sum_{s=1}^{T} R_s v^{(0)}(0,s) = \sum_{s=1}^{T} R_s\left[1 + h^{(0)}(0,t_k)\right]^{-t_k}$$

	Per altro, se si immettesse un titolo sul mercato il cui prezzo è P ≠ P_0 sarebbe possibile fare arbitraggio; tuttavia, nella pratica di un *mercato con investitori razionali*, ciò non sarebbe possibile dal momento che, in pochi secondi, il meccanismo di domanda/offerta farebbe convergere il prezzo P al prezzo di equilibrio P_0
Calcolo del prezzo di un titolo ad un tempo t	Dato il prezzo tel quel $P_t = P_0$ (che rappresenta il prezzo odierno) del titolo, per calcolare il prezzo del titolo tra t = x mesi basta applicare: $$P_{\frac{x}{12}} = P_0 * (1 + i_x)^{\frac{x}{12}}$$
Duration	Si chiama ***duration*** di un'obbligazione con entrate a_n alle scadenze t_n rispetto al tasso d'interesse *i* la quantità: $$D(i) = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}} = \sum_{s=1}^{n} \frac{a_s t_s (1+i)^{-t_s}}{P_{tq}}$$ *Osservazioni* • Essa è la media ponderata delle entrate a_s con i loro valori attualizzati al tasso d'interesse composto *i* • Ha come unità di misura il tempo espresso in anni • Risulta sempre che $$t_1 \leq D(i) \leq t_n$$ Se ci fosse un solo flusso, $D(i) = T$ N.B.: se *i* è il tasso di mercato, ovvero la STT è piatta, allora: • Il prezzo tel quel del titolo calcolato al tasso *i* risulta: $$P_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s} = P(i)$$ Cioè esattamente il denominatore della Duration • Il tasso di mercato coincide con il rendimento effettivo del titolo, cioè con il suo TIR x*. Infatti: $$G(i) = -P_0 + \sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s} = 0$$
Immunizzazione finanziaria e Rischio di Tasso	Supponiamo che la STT sia piatta e che si desideri investire denaro oggi in t = 0 fino all'epoca z > 0 al tasso i offerto dal mercato oggi. Per realizzare l'investimento si può semplicemente acquistare a pronti un titolo con cedola scadente in $t_n \geq z$ e continuare a reinvestire le cedole ogni qual volta queste vengano incassate Per analizzare l'investimento ipotizziamo due diversi scenari: **<u>CASO DI STT PIATTA E TASSO INVARIATO IN TUTTO IL PERIODO DI IMPIEGO</u>** → il tasso rimane costante e pari ad *i* per tutta la durata dell'impiego [0,z] Si chiama ***valore di smobilizzo*** il capitale ricavato in *z* dallo smobilizzo di un portafoglio di azioni avente entrate a_s ai tempi t_s ed associato al tasso di mercato *i*:

$$V(i, z) = M(i, z) + P(i, z) = \sum_{s=1}^{n} a_s (1 + i)^{z - t_s}$$

In questa equazione:
- $M(i, z) \rightarrow$ montante realizzato dal reimpiego cedole
- $P(i, z) \rightarrow$ prezzo di rivendita del titolo tra z anni

CASO DI SST PIATTTA MA CON VARIAZIONE DEL TASSO *i* PRIMA DELLO STACCO DELLA PRIMA CEDOLA → il tasso di mercato subisce una variazione Δi in $t \in (0, t_1]$; $i' = i + \Delta i$ diviene il nuovo tasso di mercato valido a partire da t
Gli effetti di tale variazione su ΔV sono inconoscibili: infatti la variazione del tasso ha effetti contrapposti sul montante realizzato dal reimpiego delle cedole e il prezzo di rivendita del titolo in z:
- $\Delta i > 0 \rightarrow \Delta M(z, i) > 0$ (maggiore rendimento) ma $\Delta P(z, i) < 0$ (maggiore sconto)
- $\Delta i < 0 \rightarrow \Delta M(z, i) < 0$ (minore rendimento) ma $\Delta P(z, i) > 0$ (minore sconto)

Si chiama *Rischio di Tasso* la variazione (potenzialmente anche negativa → da cui *rischio*) del valore ottenuto con la variazione del tasso d'interesse e quella attesa, se non si fosse verificata tale variazione:

$$Rischio\ di\ Tasso = \Delta V(z, i) = V(z, i + \Delta i) - V(z, i)$$

La variazione presenta due componenti:
- Rischio di reimpiego = differenza tra il rendimento delle cedole coinvolte dalla variazione
- Rischio di prezzo = differenza del prezzo del titolo (rappresentato dalle cedole residue) al momento della variazione

---

Il problema di conoscere in che istante il valore di smobilizzo del portafogli calcolato al variare del tasso di mercato sia superiore al valore di smobilizzo del portafogli al tasso iniziale, si chiama ***immunizzazione finanziaria***

Per ottenere una prima risposta dovremo supporre che il tasso *i* vari e, per farlo, indichiamolo come una variabile x:

$$V(x, z) = M(x, z) + P(x, z) = \sum_{s=1}^{n} a_s (1 + x)^{z - t_s}$$

Quantità che ora dipende da due variabili, *z* e *x*.
Poiché il tasso di mercato x sfugge al nostro controllo, l'unica cosa che è possibile fare è quella di chiedersi: *esiste un tempo z* in cui:*

$$V(x, z^*) \geq V(i, z^*)$$

La risposta è affermativa, e in particolare sarà necessario che la funzione $V(x, z^*)$ presenti un punto stazionario di minimo in (i,z*), ovvero che:

$$\frac{d}{dx} V(x, z^*) = 0$$

I calcoli dimostrano che è vera la seguente proposizione

	Proposizione *Si assuma che, in un mercato che precedentemente aveva STT piatta, si investa un titolo; il tasso d'interesse i nel mercato varia soltanto precedentemente alla sua prima scadenza. Un portafogli di titoli è* ***immunizzato contro il rischio*** *se viene smobilizzato ad un tempo z pari alla sua* ***duration*** $$z = D = \frac{\sum_{s=1}^{n} t_s a_s (1+i)^{-t_s}}{\sum_{s=1}^{n} a_s (1+i)^{-t_s}}$$
Duration di portafogli di titoli	Si considerino due titoli A e B con duration D_A e D_B e prezzi P_A e P_B. Allora la duration del portafogli A+B è: $$D_{A+B} = \frac{P_A}{P_A + P_B} D_A + \frac{P_B}{P_A + P_B} D_B$$ Inoltre, si chiama ***percentuale di valore*** o ***quota di acquisto*** α: $$\alpha = \frac{ammontare\ investito\ nel\ titolo\ T}{ammontaare\ totale\ di\ P}$$ Da cui: $$D = \alpha_A D_A + \alpha_B D_B$$ $$D = \alpha D_A + (1-\alpha) D_B$$ Generalizzando con k titoli: $$D(i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i D_i(i)$$ *Osservazioni*: Può essere richiesto di costruire un portafogli costituito da una percentuale di titolo A e una percentuale di titoli B, eventualmente immunizzato in t = n (= avente duration D = n), impiegando un capitale iniziale in C Per farlo occorre: • Trovare le percentuali di A e di B mediante la formula $D_{A+B} = \alpha D_A + (1-\alpha) D_B$ • Definire quale percentuale di capitale C investire in A e in B mediante le percentuali appena trovate • Trovare quanti titolo acquistare in t = 0 con il capitale a disposizione, dividendo i rispettivi capitali che si desidera impiegare per i rispettivi prezzi tel quel • Definire il portafogli: questo avrà l'uscita di capitale all'inizio e successivamente i vari flussi moltiplicati per la quantità di titolo acquistata $$P = \alpha A + \beta B = \begin{bmatrix} -C \\ \alpha a_1 + \beta b_1 \\ \dots \end{bmatrix}$$ • Controllare eventualmente la Duration del portafogli trovato
Duration e volatilità	Un ulteriore uso della duration riguarda la ***stima della variazione del corso del quel*** di un titolo al variaire del tasso di mercato *i* Chiamiamo ***duration modificata*** o ***volatilità***:

<table>
<tr><td></td><td>

$$D^* = \frac{D}{1+i}$$

In prima approssimazione, la variazione relativa del prezzo P è pari a:

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^* \Delta i$$

Più precisamente, detto P^* il nuovo prezzo, si ha:

$$P^* = P - D^* P \Delta i + o(\Delta i)$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

7. SCELTE FINANZIARIE: INDICATORI GLOBALI

</td></tr>
<tr><td>Ripasso: DCF, VAN e TIR</td><td>

1) DCF: fornisce il valore attuale netto dell'operazione in funzione del tasso d'interesse di valutazione x ≥ 1:

$$G(x) = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{(1+x)^{t_s}}, x \geq -1$$

2) VAN: somma dei valori attuali dei singoli flussi di cassa generati da un'operazione finanziaria, calcolati ad uno specifico tasso ***i***, detto **costo opportunità dei mezzi propri:**

$$VAN(i) = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s}{(1+i)^{t_s}}$$

Proprietà

- $VAN_{A+B} = VAN_A + VAN_B$ $(operatore\ lineare)$
- $VAN_{\alpha A} = \alpha * VAN_A$

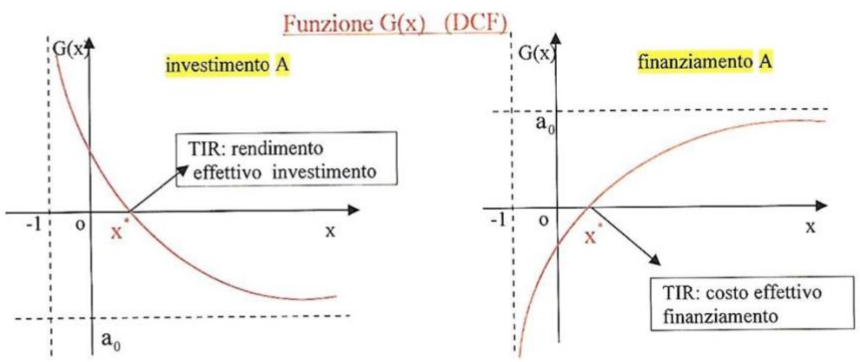
3) TIR: tasso interno di rendimento, è un qualsiasi x*, zero del DCF:

$$TIR = x^*\ t.c.\ G(x^*) = 0$$

L'equazione, da risolvere in x, può essere zero, una o più soluzioni

Proprietà

- $TIR_{-A} = TIR_A$
- $TIR_{\alpha A} = TIR_A$



</td></tr>
<tr><td>Criterio del VAN e della</td><td>

Ipotesi per l'applicazione del criterio del VAN

1) Si fissa un orizzonte temporale di scelta finito

</td></tr>
</table>

ricchezza finale	2) Si fissa l'obiettivo economico finanziario: sia W_0 la ricchezza iniziale di un soggetto e W_T la sua ricchezza finale 3) Sia noto il tasso composto annuo i per la valutazione dell'investimento (*costo-opportunità dei mezzi propri*) e sia esso costante per tutto il periodo 4) I movimenti di cassa devono essere noti con certezza e l'operazione deve essere sostenuta mediante i *soli mezzi propri* **PRIMO CASO**: valutazione di una sola operazione finanziaria A: • $VAN_A(i) > 0 \rightarrow$ conviene investire in A • $VAN_A(i) = 0 \rightarrow$ è indifferente investire o meno in A • $VAN_A(i)z < 0 \rightarrow$ non conviene investire in A N.B.: la formula di calcolo per esprimere la ***ricchezza finale*** è $$W_T(InvSI) = [W_0 + VAN_A(i)] * (1+i)^T$$ $$W_T(InvNO) = W_0(1+i)^T$$ **SECONDO CASO**: valutazione di due investimenti A e B: • $VAN_A(i) > VAN_B(i) \rightarrow$ conviene investire in A piuttosto che in B • $VAN_A(i) = VAN_B(i) \rightarrow$ è indifferente investire in A o in B • $VAN_A(i) < VAN_B(i) \rightarrow$ conviene investire in B piuttosto che in A N.B.: in sostanza un investitore sceglie l'investimento con VAN positivo più grande; non è nemmeno contemplabile l'ipotesi di scelta di un investimento con VAN negativo dal momento che ciò implicherebbe una perdita (di pari valore del VAN)
Limiti del VAN e come superarli: VANG e APV	PRIMO LIMITE: il VAN non considera il fatto che i possa variare da 0 a T. RISOLUZIONE DEL PRIMO LIMITE → **VANG** (VAN Generalizzato) **a)** Nota la struttura dei **tassi spot** $$VANG(i_k) = a_0 + \frac{a_1}{[1+h(0,t_1)]^{t_1}} + \frac{a_2}{[1+h(0,t_2)]^{t_2}} + \cdots + \frac{a_n}{[1+h(0,t_n)]^{t_n}}$$ b) Nota la struttura dei **tassi forward** $$VANG[h(t_{k-1},t_k)] = a_0 + \frac{a_1}{[1+h(0,t_1)]^{t_1}} + \frac{a_2}{[1+h(0,t_1)]^{t_1}[1+h(t_1,t_2)]^{t_2-t_1}} + \ldots + \frac{a_n}{[1+h(0,t_1)]^{t_1}[1+h(t_1,t_2)]^{t_2-t_1} \ldots [1+h(t_{n-1},t_n)]^{t_n-t_{n-1}}}$$ SECONDO LIMITE: il VAN non permette di *sostenere* un'operazione con un'altra (un investimento con un finanziamento RISOLUZIONE DEL SECONDO LIMITE → **APV** (Adjusted Present Value) Si consideri un investimento A di flussi a_n alle scadenze t_n. Sia $W_0 < a_0$, ovvero *i mezzi propri non coprono l'esborso per l'investimento*. In tal caso si deve ricorrere a mezzi terzi: siano qundi f_n i flussi del finanziamento di supporto F. Sia *i* il costo-opportunità dei mezzi propri e *j* il tasso di finanziamento. *Si definisce* ***adjusted present value*** – ***APV*** – il VAN dei flussi netti di capitale calcolato al tasso *i* $$APV(i) = \sum_{s=0}^{n} \frac{a_s + f_s}{(1+i)^{t_s}} = VAN_{INV}(i) + VAN_{FIN}(i)$$

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

CRITERIO DELL'APV: considerando un investimento parzialmente finanziato da terzi, se $APV(i) > 0$, l'investimento si considera conveniente

<table>
<tr><td>Situazione</td><td>$VAN_{INV}(i)$</td><td>$VAN_{FIN}(i)$</td><td>$APV(i) = VAN_{INV}(i) + VAN_{FIN}(i)$</td></tr>
<tr><td>$i < j$
(normalità)</td><td>> 0</td><td>< 0</td><td>$VAN_{INV}(i) > VAN_{FIN}(i) \rightarrow APV > 0$
$\rightarrow$ conviene
$VAN_{INV}(i) < VAN_{FIN}(i) \rightarrow AP < 0 \rightarrow$
non conviene</td></tr>
<tr><td>$i = j$</td><td>> 0</td><td>$= 0$</td><td>$VAN_{INV}(i) > 0 \rightarrow$ conviene/non cambia nulla</td></tr>
<tr><td>$i > j$
(finanziamento agevolato)</td><td>> 0</td><td>> 0</td><td>$APV > 0 \rightarrow$ più riceviamo finanziamenti e meglio è</td></tr>
</table>

Nel caso di più finanziamenti, l'APV assume la seguente forma:

$$APV(i) = VAN_{INV}(i) + \sum_{s=0}^{n} VAN_{FIN}^{(s)}(i)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Investimento con tassi di finanziamento non costante: il GAPV</td>
<td>

Se il tasso i non è costante e abbiamo a che fare con più operazioni, occorre conoscere la struttura a termine dei tassi d'interesse; possiamo applicare il GAPV:

a) Nota la struttura dei tassi spot:

$$GAPV[h(0,t_k)] = (a_0 + f_0) + \frac{a_1 + f_1}{[1 + h(0,t_1)]^{t_1}} + \frac{a_2 + f_2}{[1 + h(0,t_2)]^{t_2}} + \cdots + \\ + \frac{a_n + f_n}{[1 + h(0,t_n)]^{t_n}}$$

b) Nota la struttura dei tassi forward:

$$GAPV[h(t_{k-1},t_k)] = (a_0 + f_0) + \frac{a_1 + f_1}{[1 + h(0,t_1)]^{t_1}} + \frac{a_2 + f_2}{[1 + h(0,t_1)]^{t_1}[1 + h(t_1,t_2)]^{t_2-t_1}} + \\ \ldots + \frac{a_n + f_n}{[1 + h(0,t_1)]^{t_1}[1 + h(t_1,t_2)]^{t_2-t_1} \ldots [1 + h(t_{n-1},t_n)]^{t_n-t_{n-1}}}$$

CRITERIO DEL GAPV: se GAPV > 0, allora l'investimento, anche se parzialmente finanziato, risulta conveniente.

N.B.: osserva questa scrittura per ricordare il GAPV → può essere scritto come somma dei valori attuali netti generalizzati, noti i tassi uniperiodali composti:

$$GAPV = VANG_{INV}(i_1, i_2, \ldots, i_n) + \sum_{s=0}^{n} VANG_{FIN}^{(s)}(i)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>Criterio del TIR (investimenti e finanziamenti puri)</td>
<td>

<u>**PRIMO CASO**: valutazione di una singola operazione</u>:

a) Se A è un progetto di ***investimento puro*** esso è:
   i. *Conveniente* $i < x^*$
   ii. *Non conveniente* $i > x^*$
   iii. *Indifferente* $i = x^*$

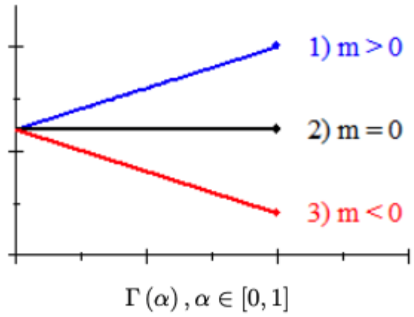
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
b) Se A è un progetto di finanziamento puro esso è:
i. Conveniente $i > x^*$
ii. Non conveniente $i < x^*$
iii. Indifferente $i = x^*$

<u>SECONDO CASO: scelta tra due o più opzioni pure proposte</u>

a) Si sceglie il TIR maggiore tra due investimenti A e B
$$x_A^* > x_B^* \rightarrow inv(A) \succ inv(B)$$
b) Si sceglie il TIR minore tra due finanziamenti A e B
$$x_A^* < x_B^* \rightarrow inv(A) \prec inv(B)$$
N.B.: questo criterio ha molti limiti di applicabilità; infatti, risulta essere meramente oggettivo (non tiene conto della soggettività del singolo nel scegliere un'operazione) né tiene conto della possibilità di supportare un'operazione con un'altra (investimento assieme a finanziamento)
</td></tr>
<tr><td>Ottimo livello di indebitamento</td><td>
Se chiamiamo con α la percentuale di finanziamento che posso attivare (fattore di attivazione), possiamo riscrivere l'operazione finanziaria di investimento A + finanziamento come:
$$OF = A + \alpha F$$
Indichiamo con $j = x_F^*$ il TIR del Finanziamento, ovvero il suo costo; il problema sta nel comprendere quale sia l'ottimo α^* per avere il migliore ritorno economico:
a) Criterio della Leva Finanziaria
È molto diffusa nella pratica una regola basata sull'effetto leva finanziaria che consiste nell'ottenere un Return on Equity (ROE), ovvero un tasso di rendimento t.c.:
$$x_{A+F}^* = x_A^*$$
Se si verifica l'effetto leva, allora conviene indebitarsi al massimo → $\alpha^* = 1$
Quando si verifica l'effetto leva? Distinguiamo tre casi:
i. $x_{A+F}^* > x_A^* \Leftrightarrow x_A^* > j \Rightarrow \alpha^* = 1$ → conviene indebitarsi al 100%
ii. $x_{A+F}^* < x_A^* \Leftrightarrow x_A^* < j \Rightarrow \alpha^* = 0$ → non conviene indebitarsi affatto
iii. $x_{A+F}^* = x_A^* \Leftrightarrow x_A^* = j \Rightarrow \alpha^* = \alpha$ → è indifferente

b) Criterio dell'APV
Consideriamo l'APV in funzione di α
$$APV(\alpha) = VAN_A(i) + \alpha VAN_F(i)$$
Che è fondamentalmente una retta di equazione $APV = q + m\alpha$. Vogliamo risolvere il problema di ottimo e possiamo farlo graficamente:
</td></tr>
</table>



i. $m = VAN_F(i) > 0 \Leftrightarrow i > j \Rightarrow \alpha^* = 1 \rightarrow$ conviene indebitarsi al 100%
ii. $m = VAN_F(i) = 0 \Leftrightarrow i = j \Rightarrow \alpha^* = \alpha \rightarrow$ indifferente
iii. $m = VAN_F(i) < 0 \Leftrightarrow i < j \Rightarrow \alpha^* = 0 \rightarrow$non conviene indebitarsi affatto

8. SCOMPOSIZIONE DEGLI INDICATORI GLOBALI

Obiettivo della scomposizione

Gli indici VAN(G) e (G)APV sono indici di valutazione di investimenti e finanziamento ti tipo **globale**, ovvero danno una visione *complessiva* da 0 a T di tutta l'operazione.
Ci poniamo come obiettivo quello di ***scomporre gli indici*** al fine di comprendere come l'investimento (o il finanziamento) matura nel tempo.

Quota di periodo

Si definisce **quota di periodo dell'indice globale relativa al generico periodo s** un valore g tale che:

$$Indice\ Globale = g_1 + g_2 + \cdots + g_n = \sum_{s=1}^{n} g_s$$

Scomposizione del VAN(G) *outstanding capitals*

Si definisce ***outstanding capital*** (O.C.) alla data s di un investimenti/finanziamento il valore ω_s che l'investimento possiede alla fata s

- Gli unici OC fissi sono $\omega_0 = P$ e $\omega_n = 0$
- Gli altri OC intermedi sono libera e la scelta di come fissarli viene fatta in base a considerazioni di carattere economico a seconda dell'operazione e in particolare:
    - Finanziamenti $\rightarrow \omega_s = D_s$
    - Titoli $\rightarrow \omega_s = P_{tq}$
    - Investimenti aziendali → OC Esogeni

In virtù di quanto detto all'ultimo punto distinguiamo tra:

1) **Outstanding capital capital coerenti con il TIR** (standard)
Dati i flussi e trovato il TIR applico la formula ricorsiva:

INVESTIMENTO	FINANZIAMENTO $\rightarrow \omega_s = D_s$
$\omega_s = \omega_{s-1}(1 + x^*) - a_s$	$D_s = D_{s-1}(1 + J^*) - f_s$

2) **Outstanding capital NON coerenti con il TIR**
Noti gli OC esogeni, posso ricavare il **TIR periodale x_s^*:**

INVESTIMENTO	FINANZIAMENTO $\rightarrow \omega_s = D_s$
$x_s^* = \frac{a_s + \omega_s - \omega_{s-1}}{\omega_{s-1}}$	$j_s^* = \frac{D_s + D_{s-1} - f_s}{D_{s-1}}$

	La **quota periodale del VAN(G) secondo oustanding capitals esogeni** è: $$g_s = \frac{a_s + \omega_s - \omega_{s-1}(1+i_s)}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_s)}$$ Dove i_s è il costo opportunità dell'investitore nei vari periodi
Scomposizione del VAN(G) secondo rendimenti periodali	La **quota periodale del VAN(G)** noti gli OC e i rendimenti periodali: $$g_s = \frac{\omega_{s-1}(x_s^* - i_s)}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_s)}$$ Se la STT fosse piatta al tasso i allora: $$g_s = \frac{\omega_{s-1}(x_s^* - i_s)}{(1+i)^s}$$ Quindi, essendo quello al denominatore il solito fattore di sconto, possiamo dire che: $$VAN = \sum_{s=1}^{n} g_s = \sum_{s=1}^{n} [\omega_{s-1}(x^* - i)] \cdot \Phi(s,0)$$ $$VANG = \sum_{s=1}^{n} g_s = \sum_{s=1}^{n} [\omega_{s-1}(x_s^* - i_s)] \cdot \Phi(s,0)$$ Osservazione: in genere si usa il solito sconto composto e le formule per ricavare g_s si dividono a seconda che: • È noto il TIR → si trovano gli OC coerenti con esso → si applica la formula • Sono noti gli OC esogeni → si calcolano i tassi di periodo x_s^* → si applica la formula
Scomposizione del (G)APV	È il caso in cui il soggetto **per effettuare l'investimento ricorre al finanziamento esterno** → l'investimento si affronta in parte con mezzi propri (MP) e in parte con mezzi terzi (MT) $$(G)APV = \sum_{s=1}^{n} g_s^{(MP)} + \sum_{s=1}^{n} g_s^{(MT)}$$ Si dimostra che: $$g_s^{(MP)} = (\omega_{s-1} - D_{s-1}) * \frac{(x^* - i)}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_s)}$$ $$g_s^{(MP)} = (D_{s-1}) * \frac{(x^* - j_s)}{(1+i_1)(1+i_2)\dots(1+i_s)}$$ Osservazioni: • Se non fosse noto il TIR ma fossero noti gli OC esogeni non ad esso coerenti, avremmo proceduto ricercando x_s^* • D_{s-1} rappresenta il debito residuo in t = s – 1 che deve essere calcolato mediante il *piano di ammortamento* secondo la formula $D_{s-1} = D_{s-2} - C_t$ • Ovviamente, se si tratta di STT piatta e quindi APV, il denominatore sarà $(1+i)^s$